



## Переробка та зберігання сільськогосподарської продукції Processing and storage of agricultural products

УДК 631.362.3

### Математичне моделювання процесу сушіння рослинних матеріалів в барабанній сушарці при змінній швидкості переміщення матеріалу

Б.І. Котов<sup>1</sup>, Р.А. Калініченко<sup>2</sup>, А.В. Спірін<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Вінницький національний аграрний університет України (м.Вінниця, Україна)

<sup>2</sup> Національний університет біоресурсів і природокористування України (м.Київ, Україна)

В системі технологічних операцій післязбиральної обробки урожаю сільськогосподарських культур важливе місце займає сушіння. Універсальні сушарки барабанного типу широко використовуються в господарствах, оскільки, дозволяють проводити зневоднення різних сипучих вологих матеріалів, але за цілим рядом показників роботи (питомі затрати енергії, рівень автоматизації, виконання екологічних вимог, та інші) ці сушарки не зовсім відповідають сучасним вимогам виробництва сільськогосподарської і переробної галузей. Вирішення задач оптимізації щодо продуктивності і енергозатрат барабанних агрегатів можливе лише за наявності адекватної математичної моделі процесів тепло- і масообміну з урахуванням визначальних параметрів процесу. В статті на основі аналізу літературних джерел обґрунтовано наукове завдання аналітичного математичного опису і розрахунку визначальних параметрів процесу сушіння рослинних дисперсних матеріалів в пневмобарабанних агрегатах. За допомогою методів теплового і матеріального балансу на основі спрощених уявлень про процеси тепло- і масообміну побудовано математичну модель, що описує зміну параметрів сушильного агента і матеріалу в пневмобарабанному агрегаті в процесі переміщення вздовж обертального барабану. Для прикладу аналітичного аналізу зміни температури сушильного агента і матеріалу та його вологовмісту наведено розв'язок отриманих рівнянь для лінійного закону переміщення матеріалу вздовж барабану. Таким чином в результаті виконаного дослідження отримано математичну модель стаціонарного процесу сушіння рослинного матеріалу в пневмобарабанному агрегаті. Визначені аналітичні залежності, що описують розподіл параметрів процесу сушіння матеріалу в барабані з урахування швидкості переміщення.

**Ключові слова:** урожай, сушіння, сушарка, продуктивність, енергозатрати, тепловий баланс, математична модель, барабан.

**Вступ.** В системі технологічних операцій післязбиральної обробки урожаю сільськогосподарських культур важливе місце займає сушіння. Враховуючи широкий асортимент висушеної продукції, найбільш універсальними сушильними агрегатами є пневмобарабанні агрегати. Але не зважаючи на широке використання барабанних сушарок теорія процесів, що в них відбуваються до теперішнього часу розроблена недостатньо. Сумісні явища тепло- і масообміну пов'язані з рухомим сушильним агентом, який ще і є засобом що транспортує матеріал. Зменшення маси матеріалу в процесі висихання призводить до зміни швидкості його переміщення вздовж сушильного барабану, яке в існуючих моделях не враховується. Разом з тим виключення довільності шви-

дкості руху матеріалу і розробка методів керування швидкістю переміщення (окрім зміни обертів барабану) можуть суттєво інтенсифікувати процес сушіння і підвищити якість продукту, що висушується.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Із останніх робіт за проблемою сушіння сільськогосподарських рослинних матеріалів і продуктів відмітимо роботи [1 - 3]. В роботі [1] обґрунтовано методи визначення переміщення матеріалу в барабані, що обертається з різним типом насадок; в монографії [2] досліджено тепло- і масообмін в процесах сушіння в барабанних агрегатах з попереочною і повздовжньою подачею матеріалу. В статті [3] обґрунтовано залежності показників процесу від конструктивних параметрів бара-

бану. В ранніх роботах [4,5] наведено математичні моделі динамічних режимів роботи барабанної сушарки. Усі відомі роботи зводяться до розробки та аналізу визначення часу перебування матеріалу в барабані і експозиції сушіння. Зміна швидкості переміщення матеріалу в барабані і її вплив на показники процесу не розглядається.

**Мета досліджень.** Визначення закономірностей процесу сушіння на основі спрощених моделей уяв та із врахуванням зміни швидкості переміщення матеріалу за координатою руху.

**Результати досліджень.** Процеси тепло- і масообміну при сушінні рослинних матеріалів і продуктів в установках пневмобарабанного типу описуються типовими диференціальними рівняннями в частинних похідних, що сформовані у замкнену систему четвертого порядку[4,5]:

$$\frac{r_0}{C_m} \left( \frac{\partial U}{\partial \tau} + v_m \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + v_m \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\alpha f}{C_m m_m} (t - \theta), \quad (1)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + v \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\alpha f}{C_p m_p} (\theta - t), \quad (2)$$

$$G_0 \left( \frac{\partial U}{\partial \tau} + v_m \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \beta f (P_H(\theta) - P(d)), \quad (3)$$

$$\frac{\partial d}{\partial \tau} + v \frac{\partial d}{\partial y} = \frac{G_0}{G_p} \left( \frac{\partial U}{\partial \tau} + v_m \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (4)$$

де  $m_m = V_6 \cdot \psi \cdot \rho_m$  – маса матеріалу в сушарці;  $m_p = V_6 \rho$  – маса сушильного агента в барабані;  $V_6$  – об'єм барабану;  $\psi$  – коефіцієнт заповнення;  $\rho_m$ ,  $\rho$  – густина матеріалу і сушильного агента;  $v_m$ ,  $v$  – швидкість матеріалу і сушильного агента;  $\alpha$ ,  $\beta$  – коефіцієнти тепло і масообміну;  $f$  – поверхня матеріалу, що бере участь в обмінних процесах;  $C_p$ ,  $C_m$  – теплоємність сушильного агента і матеріалу;  $r_0$  – теплота пароутворення;  $P_H$ ,  $P$  – пружність насиченої пари і в сушильному агенті.

Математичне обґрунтування фізики рівнянь тепло- і масообміну є наступні умови: волога з матеріалу видаляється за законом Дальтона, при цьому волога в матеріалі випаровується і видаляється одночасно; вологовміст і температура в об'ємі матеріалу розподілені рівномірно; тепло- і масообмін відбувається тільки між поверхнею матеріалу і сушильним агентом; ефекти випромінювання і контактної теплопередачі враховуються коефіцієнтами теплообміну; стаціонарні поля температур і вологовмісту приймаються однаковими, що змінюються за координатою  $y$ , що відраховується в напрямку руху матеріалу.

Система (1)-(4) є повною математичною моделлю процесу сушіння в пневмобарабанному агрегаті з урахуванням прийнятих припущень при відповідних крайових умовах:

$$\begin{aligned} \theta(0, \tau) &= \theta_1(\tau); & t(0, \tau) &= t_1(\tau); \\ U(0, \tau) &= U_1; & d(0, \tau) &= d_1 \\ \theta(y, 0) &= \theta_0; & t(y, 0) &= t_0; \\ U(y, 0) &= U_0; & d(y, 0) &= d_0 \end{aligned}$$

Розв'язок нелінійної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних являє собою самостійну задачу досліджень і може бути отримана для кожного об'єкта окремо в чисельному вигляді, або в передавальних функціях [5].

Для розв'язку конкретної задачі – визначення впливу швидкості переміщення матеріалу на (статичні і динамічні) режими сушіння систему рівнянь треба в значній мірі спростити і розділити на два етапи: визначення усталеного режиму роботи сушарки і перехідного. Система рівнянь може бути значно спрощена, якщо зробити додаткові припущення: інтенсивність сушіння пропорційна поточному вологовмісту і швидкості нагріву матеріалу і може бути описана рівняннями:

Ликова [6]:

$$-\frac{dU}{d\tau} = k(t)(U - U_r), \quad (5)$$

$$dU = \frac{C_m}{r_0 R b} d\theta, \quad (6)$$

де  $k(t)$  – коефіцієнт сушіння,  $U_r$  – рівноважний вологовміст;  $Rb = C_m(U)d\theta/r_0(\theta)dU$  – критерій Ребіндера.

Оскільки, коефіцієнт теплообміну в процесі сушіння зменшується [2] і зменшується маса матеріалу в барабані (за рахунок висушування), то величину  $\alpha f/m_m$  – можна прийняти сталою (середньою за процес); коефіцієнт сушіння залежить від температури сушильного агента. Прийmemo, що коефіцієнт сушіння лінійно залежить від температури:

$$k(t) = a + bt \quad (7)$$

Зміна вологовмісту сушильного агента не суттєво впливає на процес видалення вологи з матеріалу [1], але при збільшенні вологовмісту сушильного агента збільшується коефіцієнт теплообміну, тому, припущення  $\alpha(y) = \text{const}$  – формально виправдане. Оскільки в барабанних сушарках сільськогосподарських матеріалів застосовують високотемпературний сушильний агент  $t \geq 120$  °C матеріал можна висушити до абсолютно сухої речовини, що дозволяє припустити величину рівноважного вологовмісту сталою величиною, відповідно до параметрів сушильного агента на виході барабана –  $U_r = U(t_2, d_2)$ .

Прийняті припущення дозволяють виключити з рівняння (1) змінну величину  $U(y)$ , а з рівняння (3) складову, що залежить від температури матеріалу  $P(\theta)$  і знизити порядок системи.

Розглянемо стаціонарний режим роботи сушарки (після періоду розігріву) коли у кожній точці об'єму барабану усі параметри процесу в часі не змінні і для кожної координати за довжиною і на виході мають постійні значення. Прирівнюючи похідні за часом до нуля і враховуючи рівняння (5) і (6) отримуємо систему рівнянь у звичайних похідних:

$$v \frac{dt(t)}{dy} = \frac{\alpha f}{C_p m_p} (\theta(y) - t(y)), \quad (8)$$

$$v_m \frac{d\theta(y)}{dy} - \frac{r_0}{C_m} v_m \frac{dU(y)}{dy} = \frac{\alpha f}{C_m m_m} (t(y) - \theta(y)) \quad (9)$$

$$-v_m \frac{dU}{dy} = (a + bt(y))(U(y) - U_r) \quad (10)$$

Введемо позначення:

$$k_1 = \frac{\alpha f}{C_m' m_m}; \quad k_2 = \frac{\alpha f}{C_p m_p v};$$

$$C_m' = C_m \left(1 - \frac{1}{Rb}\right).$$

З урахуванням зроблених припущень і враховуючи зміну швидкості переміщення матеріалу вздовж сушильного тракту, у відповідності до зменшення маси матеріалу при проходженні барабану з рівнянь (8) і (9) матимемо:

$$\frac{dt(y)}{dy} = k_2 [\theta(y) - t(y)], \quad (11)$$

$$\frac{d\theta(y)}{dy} = \frac{k_1}{v(y)} [t(y) - \theta(y)]. \quad (12)$$

Відніmemo друге рівняння від першого:

$$\frac{d}{dy} [t(y) - \theta(y)] =$$

$$= - \left[ \frac{k_1}{v(y)} + k_2 \right] (t(y) - \theta(y)). \quad (13)$$

Звідки один з перших інтегралів системи набуває вигляду:

$$\ln|t(y) - \theta(y)| = \ln(C_1) - \int_0^y \left[ \frac{k_1}{v(s)} + k_2 \right] ds. \quad (14)$$

Звідки один з перших інтегралів системи набуває вигляду:

$$t(y) - \theta(y) = C_1 \cdot \exp \left( - \int_0^y \left[ \frac{k_1}{v(s)} + k_2 \right] ds \right). \quad (15)$$

Розв'язок відносно  $t(y)$ :

$$t(y) = \theta(y) + C_1 \cdot \exp \left( - \int_0^y \left[ \frac{k_1}{v(s)} + k_2 \right] ds \right). \quad (16)$$

Розв'язок відносно  $\theta(y)$ :

$$\theta(y) = t(y) - C_1 \cdot \exp \left( - \int_0^y \left[ \frac{k_1}{v(s)} + k_2 \right] ds \right). \quad (16a)$$

Підставимо вираз (16a) в рівняння (11) і отримаємо:

$$\frac{dt(y)}{dy} = -k_2 C_1 \cdot \exp \left( - \int_0^y \left[ \frac{k_1}{v(s)} + k_2 \right] ds \right). \quad (17)$$

Його розв'язок має вигляд:

$$t(y) = -k_2 C_1 \times$$

$$\times \int_0^y \exp \left( - \int_0^\xi \left( k_2 + \frac{k_1}{v(s)} \right) ds \right) d\xi + C_2. \quad (18)$$

Підставимо отриманий вираз (18) в рівняння (16a) і отримуємо розв'язок рівняння:

$$\theta(y) = -k_2 C_1 \times$$

$$\times \int_0^y \exp \left( - \int_0^\xi \left( k_2 + \frac{k_1}{v(s)} \right) ds \right) d\xi +$$

$$+ C_2 - C_1 \cdot \exp \left( - \int_0^y \left[ \frac{k_1}{v(s)} + k_2 \right] ds \right). \quad (19)$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  визначимо з граничних умов:

$$t(0) = t_1; \quad \theta(0) = \theta_1; \quad C_2 = t_1;$$

$$\theta_1 = C_2 - C_1; \quad C_1 = t_1 - \theta_1.$$

Розв'язок задачі Коші матиме вигляд:

$$\theta(y) = -k_2 (t_1 - \theta_1) \times$$

$$\times \int_0^y \exp \left( - \int_0^\xi \left( k_2 + \frac{k_1}{v(s)} \right) ds \right) d\xi +$$

$$+ t_1 - (t_1 - \theta_1) \cdot \exp \left( - \int_0^y \left[ \frac{k_1}{v(s)} + k_2 \right] ds \right),$$

$$t(y) = -k_2 (t_1 - \theta_1) \times$$

$$\times \int_0^y \exp \left( - \int_0^\xi \left( k_2 + \frac{k_1}{v(s)} \right) ds \right) d\xi + t_1. \quad (20)$$

Приймемо в першому наближенні лінійну залежність швидкості переміщення від довжини сушильного тракту:  $v(s) = a_1 + b_1 s$ .

Тоді:

$$- \int_0^y \left[ \frac{k_1}{v(s)} + k_2 \right] ds = - \left[ k_2 y + \frac{k_1}{b_1} \cdot \ln \frac{a_1 + b_1 y}{a_1} \right] \quad (22)$$

Підставимо (22) в (17) і з врахуванням початкових умов отримуємо:

$$t(y) = t_1 + \frac{1}{b_1} \left[ k_2 (t_1 - \theta_1) \cdot \exp \left( \frac{a_1 k_2}{b_1} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left( a_1^{\frac{k_1}{b_1}} (a_1 + b_1 y)^{1 - \frac{k_1}{b_1}} E_n(Z_1) - a_1 E_n(Z_2) \right) \right], \quad (23)$$

де

$$E_n(Z_1) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-Z_1 t}}{t^n} dt \quad \text{і} \quad E_n(Z_2) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-Z_2 t}}{t^n} dt$$

– експоненціальні інтеграли,

$$Z_1 = k_2 \left( \frac{a_1}{b_1} + y \right), \quad Z_2 = \frac{a_1 k_2}{b_1}, \quad n = \frac{k_1}{b_1}.$$

Підставляючи рівняння (22) і отримане рівняння для температури сушильного агента в (16а), отримуємо:

$$\theta(y) = t_1 + \frac{1}{b_1} \left[ k_2(t_1 - \theta_1) \cdot \exp\left(\frac{a_1 k_2}{b_1}\right) \times \left( a_1^{\frac{k_1}{b_1}} (a_1 + b_1 y)^{1 - \frac{k_1}{b_1}} E_n(Z_1) - a_1 E_n(Z_2) \right) \right] - (24)$$

$$- (t_1 - \theta_1) \cdot \exp\left(-k_2 y - \frac{k_1}{b_1} \cdot \ln \frac{a_1 + b_1 y}{a_1}\right).$$

Підставляючи значення температури  $t(y)$  у рівняння (10) і після поділу змінних матимемо:

$$U(y) = U_r - (U_1 - U_r) \cdot \exp \left[ \int_0^y \frac{1}{a_1 + b_1 y} \times \left( a + b \cdot \left( t_1 + \frac{1}{b_1} \left[ k_2(t_1 - \theta_1) \cdot \exp\left(\frac{a_1 k_2}{b_1}\right) \times \left( a_1^{\frac{k_1}{b_1}} (a_1 + b_1 y)^{1 - \frac{k_1}{b_1}} E_n(Z_1) - a_1 E_n(Z_2) \right) \right] \right) \right) dy \right]. \quad (25)$$

Таким чином отримані рівняння (23), (24), (25) визначають розподіл температури і вологовмісту матеріалу в процесі сушіння в обертовому барабані при зміні швидкості переміщення.

#### Висновки:

1. Отримано математичну модель стаціонарного процесу сушіння рослинного матеріалу в пневмобарабанному агрегаті.

#### Анотація

### Математическое моделирование процесса сушки растительного материала в барабанной сушилке при переменной скорости перемещения материала

Б.И. Котов, Р.А. Калиниченко, А.В. Спирин

В системе технологических операций послеуборочной обработки урожая сельскохозяйственных культур важное место занимает сушки. Универсальные сушилки барабанного типа широко используются в хозяйствах, поскольку позволяют проводить обезвоживание различных сыпучих влажных материалов, но по целому ряду показателей работы (удельные затраты энергии, уровень автоматизации, выполнения экологических требований, и другие) эти сушилки не совсем соответствуют современным требованиям производства сельскохозяйственной и перерабатывающей отраслей. Решение задач оптимизации по производительности и энергозатратам барабанных агрегатов возможно только при наличии адекватной математической модели процессов тепло- и массообмена с учетом определяющих параметров процесса. В статье на основе анализа литературных источников обоснованно научную задачу аналитического математического описания и расчета определяющих параметров процесса сушки растительных дисперсных материалов в пневмобарабанных агрегатах. С помощью методов теплового и материального баланса на основе упрощенных представлений о процессах тепло- и массообмена

2. Визначені аналітичні залежності, що описують розподіл параметрів процесу сушіння матеріалу в барабані з урахування швидкості переміщення.

#### Література

1. Першин В.Ф. Переработка сыпучих материалов в машинах барабанного типа [Текст] / В.Ф. Першин, В.Г. Однолько, С. В. Першина. – М.: Машиностроение, 2009. – 220 с.

2. Антипов С.Т. Тепло- и массообмен при сушке в аппаратах с вращающимся барабаном [Текст] / С.Т. Антипов, В.Я. Валуйский, В.И. Меснянкин. – Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад., 2001. – 308 с.

3. Незведська І.В. Теоретичні передмови визначення залежності технологічних параметрів процесу сушіння від конструктивних параметрів сушильного барабана [Текст] / І.В. Незведська. // Науковий вісник НУБіП України. К., 2012. – Вип. 2. – №170. – С. 95 -101.

4. Питухин Е.А. Математическая модель управления качеством работы сушильной установки барабанного типа [Текст] / Е.А. Питухин // Труды Петрозаводского государственного университета. – 1997. – Вып. 6. – С. 1 - 6.

5. Гірник М.Л. Математичне моделювання процесів конвективного сушіння [Текст] / М.Л. Гірник, З.Ю.Мазяк, В.М.Гербеї та інш. К. Будівельник. – 1993. – 248 с.

6. Котов Б.І. Врахування розподіленості параметрів при моделюванні динамічних режимів сушарок сільськогосподарських матеріалів [Текст] / Б.І. Котов, С.П. Степаненко, В.О. Швидя. // Сільськогосподарські машини. – 2016. – Луцьк. – Вип. 3 - 4. – С. 74 - 80.

построена математическая модель, описывающая изменение параметров сушильного агента и материала в пневмобарабанном агрегате в процессе перемещения вдоль вращательного барабана. На примере аналитического анализа изменения температуры сушильного агента и материала и его влагосодержания приведены решение полученных уравнений для линейного закона перемещения материала вдоль барабана. Таким образом в результате выполненного исследования получена математическая модель стационарного процесса сушки растительного материала в пневмобарабанном агрегате. Определены аналитические зависимости, описывающие распределение параметров процесса сушки материала в барабане с учетом скорости перемещения.

**Ключевые слова:** урожай, высушивание, сушилка, производительность, энергозатраты, тепловой баланс, математическая модель, барабан.

## Abstract

### Mathematical simulation of drying plant material in a drum dryer at a variable speed of moving material

B.I. Kotov, R.A. Kalinichenko, A.V. Spirin

In the system of technological operations postharvest handling harvest crops occupies an important place dry. Universal dryer drum widely used in households, since, allow dewatering of various loose moist materials, but for a number of performance indicators (unit cost of energy, the level of automation, the implementation of environmental requirements, etc.), these dryers do not completely meet the current requirements of agricultural and processing industries. Solving optimization problems on performance and energy consumption drum units is possible only if adequate mathematical model of heat and mass transfer considering the determining process parameters. The article is based on an analysis of the literature substantiated scientific task analytic mathematical description and calculation of the defining parameters of drying plant material dispersed in the drum units. With the help of heat and material balance based on simplistic ideas about the processes of heat and mass transfer mathematical model that describes the change in the parameters of the drying agent and the material in the drum unit in the process of moving along the rotary drum. For example, analytical analysis of changes in temperature of the drying agent and moisture content material and its solution are obtained for linear equations law material moving along the drum. Thus, in the result of the study received a fixed mathematical model of drying plant material in the drum unit. Designated analytical dependence describing the distribution parameters of drying material in the drum with regard variable speed of moving.

**Keywords:** harvest, drying, drying, productivity, energy consumption, heat balance, mathematic model, drum.

---

Представлено від редакції: О.І. Завгородній / Presented on editorial: O.I. Zavhorodnii

Рецензент: С.О. Харченко / Reviewer: S.O. Harchenko

Подано до редакції / Received: 14.03.2017