Транспортні процеси агропромислового комплексу
Transport processes of agro-industrial complex

УДК 624 https://doi.org/10.5281/zenodo.6800365

Моделювання трас з обмеженнями на топологічні та геометричні параметри

А.І. Левтеров [1], Г.А. Плєхова [2], М.В. Костікова [3], Н.Г. Бережна [4]

[1, 2, 3] Харківський національний автомобільно-дорожній університет (м. Харків, Україна),
[4] Державний біотехнологічний університет (м. Харків, Україна)
email: [1] lai@khadi.kharkov.ua, [2] plehovaanna11@gmail.com, [3] kmv_topaz@ukr.net,
[4] bereg_nat@ukr.net; ORCID: [1] 0000-0001-6586-1061, [2] 0000-0002-6912-6520,
[3] 0000-0001-5197-7389, [4] 0000-0001-8740-3387

Розглянуті та розроблені математичні моделі розв'язання оптимізаційних задач з'єднання в неоднозв'язних областях при типових технологічних обмеженнях на геометричні та топологічні параметри трас, перш за все, на кривину і кількість зламів. Ці моделі поєднані з існуючими і перспективними топогеодезичними моделями полігонального зображення територій. Рішення задач з'єднання пов'язана з пошуком оптимальних траєкторій трас та мереж в ділянках вільної геометричної форми, що потребує розробки достатньо загальних моделей як областей, в котрих ці з'єднання реалізуються. Це можуть бути з'єднання таких типів, як ломані, манхетенові, гладкі, тілесні та траси інших видів. Як показано у роботах Смелякова С. В. та Алісейко Г. А. (Плєхова Г. А.) глобальна та локальна регуляризація геометричних побудов при рішенні задач з'єднань [1], загальну оптимізаційну задачу з'єднань можна сформулювати як задачу вибору $<\Omega, R>$, де Ω – множина альтернатив, а R – принцип оптимальності. При цьому множина Ω – може бути представлена як сукупність $\{\varphi, Q\}$ фазового простору φ та обмежень Q, накладених на параметри фазового простору φ. В свою чергу, фазовий простір φ доцільно уявити декартовим добутком $\varphi = X * Y * Z * U$ вихідних даних X, збурювань Y, параметрів керувань U та результатів Z. Як показує аналіз задачі [1] ефективність моделювання фазового простору φ в першу чергу пов'язана з описом вихідних даних X в ділянці F та просторі L припустимих трас в F. Це питання розглядається як розробка побудови структури моделей та методології їх використання, яка дозволяла би можливість конструктивного та ефективного (в обчислювальному відношенні) побудови та перебору різноманітних моделей та алгоритмів, які зберігають геометричність інваріантності моделей, необхідних для конкретного використання в умовах припустимості використання різноманітних структур вихідних даних. Рішенню проблеми створення такої моделі в кордонах геометричного проектування для задач з'єднання і присвячена дана робота.

Ключові слова: *математична модель, оптимізаційна задача, обмеження, топологічні параметри, будівельні норми і правила, гомотопія, точність*

Постановка проблеми та її актуальність. Об'єктом дослідження є математичні моделі задач пошуку оптимальних мереж і маршрутів, які виникають при автоматизації проектування і управління з урахуванням ландшафту при обмеженнях на форму, взаємне положення та інші параметри з'єднань. Предметом дослідження є розробка математичної моделі розв'язання задач пошуку оптимальних трас і зв'язуючих мереж в неоднозв'язних областях при обмеженнях на кривину, кількість зламів та інші геометричні і топологічні параметри з'єднань, що відображають типові технологічні вимоги. Методи дослідження: в роботі використовуються методи оптимізації, обчислювальні методи, обчислювальна геометрія, методи математичного моделювання і комбінаторної топології. Що стосується топологічних параметрів, по в роботі проведена їх декомпозиція на систему базових і стандартних задач; сформульовані базові оптимізаційні задачі.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Найбільш ефективний підхід до розв'язання аналогічних задач, яка є *NP*-повною, навіть для випадку ламаних в опуклій області, розвинений у роботах Ю. Г. Стояна, С. В. Смелякова [1 – 4]. Він полягає у синтезі комбінаторних і варіаційних методів оптимізації в рамках ієрархічної системи моделей. Моделі нижнього рівня орієнтовані на розв'язання базових задач пошуку оптимальної траси за допомогою варіаційних методів, розробкою яких займалися М. М. Моісеєв, С. В. Смеляков, Н. З. Шор, а верхнього – на переборі гомотопічних сімейств шляхів і мереж на основі методів дискретної оптимізації, розвинених у роботах В. І. Михалєвича, І. В. Сергієнка, Ю. Г. Стояна, С. В. Яковлєва та інших [5 - 7]. Неможливість повної формалізації вимог БНіП – будівельних норм і правил (внаслідок їх суперечливості і не повної строгості формулювань) і підлеглий характер задач з'єднання по відношенню до задач упорядкування регіонів визначає необхідність їх розв'язання в двох режимах – оптимізації та імітації, коли необхідна участь ОПР (особа, що приймає рішення) у процесі інтерактивного розв'язання задач з'єднання.

Мета роботи. Метою даної роботи є розробка математичної моделі розв'язання оптимізаційних задач з'єднання в неоднозв'язних областях при типових технологічних обмеженнях на геометричні та топологічні параметри трас, перш за все, на кривину і кількість зламів. Ця модель повинна бути поєднана з існуючими і перспективними топогеодезичними моделями полігонального зображення територій, а методи оптимізації повинні забезпечувати ефективний розв'язок основних класів прикладних задач і допускати природну інтеграцію в існуючі і перспективні системи автоматизації проектування і управління.

Для досягнення цієї мети необхідно вирішити такі задачі:

а) виділити основні критерії й обмеження, пов'язані з геометричними і топологічними параметрами трас, які необхідно враховувати при проектуванні з'єднань, і на цій основі сформулювати основну оптимізаційну задачу;

б) розробити загальну модель задач з'єднання, яка забезпечує постановку основних типів задач оптимізації і моделювання трас на необхідних функціональних класах ліній, що вимагаються, допускає поповнення та інтеграцію в існуючі системи.

Побудова та опис моделі. У відповідності з вимогами до точності рішень, що одержуються, і обчислювальної ефективності методів їхньої побудови, а також існуючими у світовій практиці тенденціями використання полігональних моделей місцевості в системах топогеодезичного забезпечення, моделі областей і методи оптимізації при розв'язанні задач з'єднання повинні замість сіткових моделей (що використовуються в сучасних системах типу ReCAD, CREDO) використовувати полігональні моделі заданої для прокладки з'єднань неоднозв'язної області

$$F = Cl\left[\frac{F_0}{\left(\bigcup_{i=1}^{n_F} F_i\right)}\right], \qquad (1)$$

де CI – операція замикання; F_0 – загальний простір, у якому розглядаються задачі моделювання; F_i, $(i = 1, 2, \dots, n_F)$ – однозв'язні області, які взаємно не перетинаються («зони заборони» для прокладки трас) в однозв'язній області F_0 на площині.

Загальною математичною особливістю гладких трас (автомобільних шляхів, залізничних і трамвайних колій) є вимога неперервності і обмеженості кривини, виконання якої необхідно для забезпечення рівня безпеки руху транспортних засобів і відсутності динамічних ударів. У зв'язку з цим у БНіП визначено, що осьові лінії трас повинні представлятися сплайнами вигляду

$$\begin{gathered} p = S_1\, r_1\, C_1\, R_1\, S_2\, r_2\, C_2\, R_2 \dots \\ \dots S_m\, r_m\, C_m\, R_m\, S_{m+1}, \end{gathered} \qquad (2)$$

де S_i – відрізки; C_i – дуги кіл; r_i, R_i – перехідні криві, в якості яких можуть використовуватися фрагменти клотоїд і кубічних парабол, m – кількість фрагментів відповідних кривих.

Аналіз БНіП визначає, що більшість технологічних обмежень для транспортних та інженерних мереж, що розглядаються, можуть бути зведені до таких основних класів обмежень геометричного і топологічного характеру: Q_1 – обмеження на максимальну довжину прямолінійних дільниць; Q_2 – обмеження на кут повороту α, $\alpha \in (-90^\circ, 90^\circ)$, у вершинах; Q_3 – обмеження на функціональний клас гладких кривих: $\widetilde{W}$, SC, SKC, SPC; Q_4 – умови на кінцях (визначають дотичні і їх довжину в точках A і B); Q_5 – примикання з допустимих дільниць; Q_6 – примикання з узгодженням потоків по напрямку; Q_7 – примикання з забезпеченням досяжності; Q_8 – примикання до границь і трас; Q_9 – топологічна структура шуканої мережі (із зв'язності, циклах).

БНіП визначають, що вибір траси трубопроводу, автомобільного шляху та ін. повинен проводитися за допомогою математичних методів по одному або декількох критеріях оптимальності (наприклад, криві слід проектувати можливо великими радіусами). При цьому критерії, як правило, виражаються через геометричні параметри трас і топологічні параметри мереж, причому деякі з них можуть не бути адитивними. Серед основних геометричних параметрів траси p слід вказати: довжину $l(p)$, кількість $m(p)$ колових вставок і їх радіуси кривини $\{p_i\}_{i=1,m(p)}$ (або – для ламаної – кількість зламів $n(p)$ і кути повороту $\{\phi_i\}_{i=1,m(p)}$), положення траси p в області F. Вони визначають вартість будівництва $c(p)$, експлуатаційні витрати $e(p)$, технологічність $t(p)$ і надійність $b(p)$, яка є однією із найважливіших ii являє добуток таких імовірних аналогів надійності

$$\begin{cases} b_m(p) = \prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_i}\right), (p_i \geq 1) \\ \text{при } m > 0; m = 0; \\ b_d(p) = \prod_{j=1}^{d}(1-g_i)^{k_j}; \\ b_l(p) = \frac{1}{l(p)}, (l(p) \geq 1). \end{cases} \quad (3)$$

У підсумку загальна задача оптимізації з'єднань (ЗЗЗ) з урахуванням введених критеріїв і обмежень може бути сформульована таким чином.

ЗЗЗ. У заданій області F маємо набір точок $\{A_i\}_{i=1,N}$ і деякі мережі $\{S_j\}_{j=1,,M}$. Вимагається з'єднати ці точки і мережі зв'язуючою мережею s^*, складеної з ліній заданого функціонального класу $S\Theta C$ так, щоб для неї виконувалися задані обмеження Q типу $Q_1 - Q_9$ і вона була найбільш ефективною в значенні заданого принципу оптимальності $R(s)$.

Враховуючи вказану вище ефективність декомпозиції ЗЗЗ, заснованої на зведенні цієї задачі до системи базових задач на безперервних сім'ях шляхів, що допускають точне рішення, приходимо до типової основної оптимізаційної задачі (ООЗ) пошуку оптимального путі в класі еквівалентності шляхів $[\tau]$ на заданому функціональному класі ліній $P(A,B)$ із фіксованими кінцями A, B при відповідному звуженні обмежень Q^*:

ООЗ. Знайти

$$\underset{p\in P_{tQ}(A,B)}{arg\ e\,xtr}\ R(p) \quad (4)$$

Далі в роботі формулюються вимоги інформаційного і обчислювального характеру до моделей розв'язання поставлених задач.

Розглядається задача глобальної і локальної декомпозиції і регуляризації ЗЗЗ на основі її зведення до системи однорідних базових задач вигляду (4), що забезпечує конструктивну регуляризацію, ефективний обчислювальний підхід до розв'язання ЗЗЗ за рахунок використання дискретних і континуальних моделей і методів. Для цього використовується дворівнева FL -модель, запропонована в роботах Ю. Г. Стояна і С. В. Смелякова. На верхньому, топологічному, рівні структура цієї моделі визначається алгебраїчним розшаруванням ліній на класи еквівалентності шляхів і мереж, а на геометричному – розгляданням у кожному з цих класів вимагаючого функціонального класу ліній. Обмеження можуть накладатися на елементи обох цих рівнів.

Оскільки різноманітність F вигляду (1), має гомотопічний характер типу диска з $n_F \geq 0$ дірками, структуру гомотопічної моделі ліній складає вільна група $C_{(n_F)}$,що задає дискретизацію безперервних сімейств шляхів.

Під мережею $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1,m}$ в області F розуміється сукупність кінцевої кількості спрямляємих кривих, які самонеперетинаються та не мають загальних точок, крім кінців. Розгляд зв'язних з'єднань типу мереж, граф і ін. призводить до задач трьох класів: пошуку оптимальних мереж на топологічному рівні, без урахування геометрії області F; оптимізації вкладень абстрактної моделі в область F і побудови оптимальної мережі в області F. Для розв'язання цих задач вводяться поняття абстрактної мережі $s^* = (V^*, R^*)$ як кінцевого зв'язного абстрактного симпліціального комплексу $K = (V^*, R^*)$, реалізація якої геометричним комплексом $s = (V, R)$ являє геометричну мережу. Мережі $s_1 = (V_1, R_1)$ і $s_2 = (V_2, R_2)$ гомотопні в F, якщо для їх абстрактних аналогів існує ізоморфізм $\omega: s_1 \to s_2$, при якому відповідність 0-симплексів означає збіг вершин у F, а відповідність 1-симплексів означає їх приналежність одному класу еквівалентності шляхів в F; мережі s_1 і s_2 вільно гомотопні, якщо вони гомотопні з точністю до зсуву 0-симплексів в F, і деформаційно еквівалентні, якщо вони ізоморфні і гомотопні, а різні ребра кожної з них можуть мати загальні точки тільки в з'єднаних ними базових вершинах. Зазначимо, що ізоморфізм мереж зберігає алгебраїчні інваріанти для базових вершин, але не враховує структури області F при вкладеннях в неї. Гомотопія зберігає гомотипність мереж, але не забезпечує їх ізоморфізму через можливості появи додаткових вершин. Деформованість мереж зберігає гомотопічні інваріанти.

Геометричною моделлю трас є функціональні класи ліній $\Lambda = \{S, SC, SKC, SPC, W, \widetilde{W}\}$ в області F, які мають сплайнове зображення (2). На них можуть бути накладені і топологічні обмеження. Введені в роботі моделі мереж і ліній дозволили звести ЗЗЗ до системи базових задач типу (2) на різноманітних функціональних класах ліній і стандартних задач на цих же класах, які відображають типові для прикладних задач сполучення обмежень і зводяться до базових задач.

Висновки. Розроблена ієрархічна математична модель загальної задачі з'єднання, яка полягає у пошуку оптимальних з'єднань (трас і зв'язуючих мереж) у неоднозв'язних областях, та виникає при проектуванні транспортних і інженерних мереж і управлінні рухом техніки по пересіченій місцевості, в рамках якої ця задача зведена до системи базових і стандартних задач пошуку оптимальних трас. Використання цієї ієрархічної структури моделей в системах прийняття рішень дозволяє вирішити проблему адекватного моделювання з'єднань у неоднозв'язних полігональних областях щодо точності, обчислювальної ефективності і відсутності інформаційної надлишковості для всіх нормативно заданих у БНіП функціональних класів ламаних і гладких ліній $\{S, SC, SKC, SPC\}$ при обмеженнях на кривину та інші геометричні і топологічні параметри трас.

Література:

1. Плехова А. А., Смеляков С. В. «Моделирование коммуникационных сетей с учетом ландшафта при разнородных критериях и ограничениях», *Информационные системы. Сборник научных трудов,* Вып. 3 (11). С. 143-146. 1998.
2. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка. 1986. 268 с.
3. С. В. Смеляков, Ю. Г. Стоян, «Моделирование пространства путей в задачах построения оптимальных траекторий», *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.,* Том 23, № 1, С. 73-82. 1983.
4. Смеляков С.В., Плехова А.А. «Построение кратчайшей трассы в неодносвязной области при ограничениях на кривизну и класс кривых», *Информационные системы. Сборник научных трудов*, Вып. 1 (12). С. 170-175. 1999.
5. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы исследования, решения. К.: Наук. думка, 2003. 264 с.
6. Плехова А. А. «Модель и метод решения задачи поиска оптимального соединения при ограничении на кривизну», *Радиоэлектроника и информатика*, № 3. С. 56-59. 1998.
7. Плехова А. А. «Построение оптимальной трассы ограниченной кривизны в неодносвязной области», *Радиоэлектроника и информатика*. № 3. С. 22-23. 1999.

References:

1. Plehova, A. and Smeljakov, S. (1998) “Modelirovanie kommunikacionnyh setej s uchetom landshafta pri raznorodnyh kriterijah i ogranichenijah”, *Informacionnye sistemy. Sbornik nauchnyh trudov*, (3 (11)), pp. 143-146.
2. Stojan, Ju. and Jakovlev, S. (1986) *Matematicheskie modeli i optimizacionnye metody geometricheskogo proektirovanija*. K: Nauk. dumka. 268 p.
3. Smeljakov, S. and Stojan, Ju. (1983) “Modelirovanie prostranstva putej v zadachah postroenija optimal'nyh traektorij”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, (23(1)), pp. 73-82.
4. Smeljakov, S. and Plehova, A. (1999) “Postroenie kratchajshej trassy v neodnosvjaznoj oblasti pri ogranichenijah na kriviznu i klass krivyh”, *Informacionnye sistemy. Sbornik nauchnyh trudov*, (1 (12)), pp. 170-175.
5. Sergienko, I. and Shilo, V. (2003) *Zadachi diskretnoj optimizacii: problemy, metody issledovanija, reshenija*. K.: Nauk. dumka. 264 p.
6. Plehova, A. (1998) “Model' i metod reshenija zadachi poiska optimal'nogo soedinenija pri ogranichenii na kriviznu”, *Radiojelektronika i informatika*, (3), pp. 56-59.
7. Plehova, A. (1999) “Postroenie optimal'noj trassy ogranichennoj krivizny v neodnosvjaznoj oblasti”, *Radiojelektronika i informatika*, (3), pp. 22-23..

Аннотация

Моделирование трасс с ограничениями на топологические и геометрические параметры

А.И. Левтеров, А.А. Плехова, М.В. Костикова, Н.Г. Бережная

Рассмотрены и разработаны математические модели решения оптимизационных задач соединения в неодносвязных областях при типовых технологических ограничениях на геометрические и топологические параметры трасс, прежде всего, на кривизну и количество изломов. Эти модели объединённые с существующими и перспективными топогеодезическими моделями полигонального изображения территорий. Решение задач соединения связано с поиском оптимальных траекторий трасс и сетей в участках свободной геометрической формы, что требует разработки достаточно общих моделей как областей, в которых эти соединения реализуются. Это могут быть соединения таких типов, как ломаные, манхетеновые, гладкие, телесные и трассы других видов. Как показано в работах Смелякова С. В. и Алисейко А. А. (Плехова А. А.) глобальная и локальная регуляризация геометрических построений при решении задач соединений [1], общую оптимизационную задачу соединений можно сформулировать как задачу выбора$< \Omega, R >$, где Ω – множество альтернатив, а R – принцип оптимальности. При этом множество Ω – может быть представлено как совокупность $\{\varphi, Q\}$ фазового пространства φ и ограничений Q, наложенных на параметры фазового пространства φ. В свою очередь, фазовое пространство φ целесообразно представить декартовым произведением $\varphi = X * Y * Z * U$ исходных данных X, возмущений Y, параметров управлений U и результатов Z. Как показывает анализ задачи [1]

эффективность моделирования фазового пространства φ в первую очередь связана с описанием исходных данных X в участке F и пространстве L допустимых трасс в F. Этот вопрос рассматривается как разработка построения структуры моделей и методологии их использования, позволяющей возможность конструктивного и эффективного (в вычислительном отношении) построения и перебора различных моделей и алгоритмов, сохраняющих геометричность инвариантности моделей, необходимых для конкретного использования в условиях допустимости использования различных структур исходных данных. Решению проблемы создания такой модели в границах геометрического проектирования для задач соединения и посвящена данная работа.

Ключевые слова: *математическая модель, оптимизационная задача, ограничения, топологические параметры, строительные нормы и правила, гомотопия, точность*

Abstract

Modeling of routes with restrictions on topological and geometrical parameters

A.I. Levterov, A.A. Pliekhova, M.V. Kostikova, N.G. Berezhna

Mathematical models for solving optimization problems of connection in non-simply connected domains with typical technological constraints on the geometric and topological parameters of the routes, first of all, on the curvature and the number of kinks, are considered and developed. These models are combined with existing and prospective topogeodetic models of the polygonal image of territories. The solution of connection problems is associated with the search for optimal trajectories of traces and networks in sections of free geometric shape, which requires the development of fairly general models as areas in which these connections are realized. These can be junction types such as polyline, Manhattan, smooth, solid, and other types of traces. As shown in the works of Smelyakov S. V. and Aliseyko A. A. (Plekhova A. A.) global and local regularization of geometric constructions in solving connection problems [1], the general optimization problem of connections can be formulated as the problem of choosing $< \Omega, R >$, where Ω – is a set of alternatives, and R is the optimality principle. In this case, the set Ω – can be represented as a set of $\{\varphi, Q\}$of the phase space φ and the constraints Q imposed on the parameters of the phase space φ. In turn, the phase space φ is expedient to represent the Cartesian product $\varphi = X * Y * Z * U$ of the initial data X, disturbances Y, control parameters U and results Z. As the analysis of the problem [1] shows, the efficiency of modeling the phase space φ is primarily related to the description of the initial data X in the section F and the space L of admissible traces in F. This issue is considered as the development of the construction of the structure of models and the methodology of their use, which allows the possibility of constructive and efficient (computationally) construction and enumeration of various models and algorithms that preserve the geometric invariance of the models required for a specific use under the conditions of admissibility of using various structures of the initial data. This work is devoted to solving the problem of creating such a model within the boundaries of geometric design for connection problems.

Keywords*: mathematical model, optimization problem, constraints, topological parameters, building codes and rules, homotopy, accuracy*

Бібліографічне посилання/ Bibliography citation: Harvard
Levterov, A. I. et al. (2022). Modeling of routes with restrictions on topological and geometrical parameters. *Engineering of nature management*, (1(23), pp. 7 - 11.

Подано до редакції / Received: 20.11.2021