



## Моделювання деформації тонкостінного циліндра, як ізотропного тіла у вигляді дійкової гуми

I.В. Дмитрів

Національний університет «Львівська політехніка»  
(м. Львів, Україна), email: [dmytriv\\_lhor@ukr.net](mailto:dmytriv_lhor@ukr.net)

Стаття присвячена проблемі моделювання деформації дійкової гуми доїльного стакана, як ізотропного тіла у вигляді тонкостінного циліндра. За основу взято розроблену аналітичну модель дійкової гуми з врахуванням її попереднього натягу, конструкційно-технологічних параметрів та фізико-механічних характеристик матеріалу гуми для моделювання деформацій у радіальній, по-вздовжній й круговій площинах.

Основним параметром змикання дійкової гуми є її радіальна деформація на всій активній частині в залежності від конструкційних параметрів та фізико-механічних характеристик гуми. Параметрами для моделювання деформацій є  $R$  – радіус дійкової гуми,  $E$  – модуль пружності,  $h$  – товщина дійкової гуми,  $p_n$  – вакуумметричний тиск,  $l$  – довжина активної частини дійкової гуми,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона для гуми,  $F_n$  – сила натягу дійкової гуми. В залежності від центрального кута у радіальній площині перерізу моделюється форма деформації дійкової гуми на всій її робочій довжині. За попереднього натягу дійкової гуми безпосередньо після зацемлених кінців є деформація до 1 мм у вигляді незначно вираженого еліпсоїда. На віддалі до 10 мм від обох зацемлених кінців за вакууму 48 КПа дійкова гума круглого перерізу деформується у вигляді форми "гантелі", однак за попереднього натягу 60 Н максимальна деформація у місці найбільшого прогину досягає 7 мм від радіуса дійкової гуми 11 мм в сторону сплюснення, а без попереднього натягу максимальна деформація у місці найбільшого прогину досягає 5 мм.

Аналіз результатів моделювання показує, що попередній натяг дійкової гуми на характер її змикання, за дії вакуумметричного тиску, не впливає. Натяг частково змінює величину деформації. Однак, попередній натяг дійкової гуми забезпечує початкову деформацію у перерізі безпосередньо після зацемлення, зменшуючи діаметр, і уможливорює надійне утримування доїльного стакана на дійці корови.

**Ключові слова:** гума дійкова, деформація радіальна, модуль пружності, натяг, ізотропне середовище, модель, циліндр

**Вступ.** Проектування робочих елементів машин, зокрема доїльних стаканів можливо за умови визначення деформацій матеріалу у процесі роботи доїльного апарату. Дійкова гума безпосередньо контактує з дійкою корови і впливає на якість процесу доїння. Від ефективності її роботи залежить інтенсивність молоковіддачі, тривалість доїння, здоров'я вимені і відповідно якість молока. В процесі експлуатації дійкова гума змінює свої властивості, втрачає еластичність, розтягується, що впливає на захворювання маститом, утворення мозолів на кінчиках дійок, що веде до гіперкератозу і атрофії.

Жорсткість дійкової гуми визначається або за величиною розтягу при навантаженні її масою 6 кг, або за вакуумом змикання протилежних стінок.

Гума є ізотропним середовищем, а деформація гумового тонкостінного циліндра буде відбуватись за умови безмоментного напруженого стану [1].

Натяг дійкової гуми частково формує характер змикання, плавний чи змикання з ударом. А з тривалістю експлуатації жорсткість гуми втрачається, і для адаптації режиму змикання до фізіології молоковіддачі доцільно коректувати натяг.

Тому моделювання деформації дійкової гуми дозволить обґрунтувати конструкційні і технологічні параметри за яких величина і характер змикання гуми буде адекватний до фізіологічних особливостей молоковіддачі.

**Аналіз останніх досліджень.** Reitsma S.Y. і Breckman D.K. досліджували вплив режимів роботи дійкової гуми і технологічних параметрів

процесу доїння на зусилля стиску дійки [2]. Зокрема Karas I., Gálík R., Pogran Š. і Šesták M. провели комп'ютерне моделювання зусилля стиску дійкової і тензора деформації [3]. Моделювання проводили за товщини гуми від 0,4 мм до 2,3 мм і вакуумметричного тиску в піддійковому просторі 50 кПа для двох типів гуми. Визначення зусилля стиску дійковою гумою дійки Davis M.A., Reinemann D.J. і Mein G.A. проводили за розробленою методикою, яка розраховує зусилля за відбитком [4]. Ними констатовано, що зусилля стиску є прямо пропорційне натягу дійкової гуми.

Аналіз результатів багатьох порівняльних експериментів вказує на те, що дизайн дійкової гуми значно впливає на характеристики доїння у порівнянні з будь-яким іншим фактором доїльного апарата. Порівняльні дослідження в Ірландії показали шестикратну різницю в спаданні доїльних стаканів, восьмикратну різницю в захворюваності дійок і 33% відмінностей у інтенсивності молоковіддачі [5]. Зручна дійкова гума мінімізує ризик ураження дійки корови. Діаметр губи мундштука коливається у межах 18-26 мм, середній отвір циліндра для дійкової гуми – 18-30 мм, а ефективна довжина вкладиша становить приблизно 90-164 мм [6].

Як правило, усі дослідники аналізують експериментально деформацію дійкової гуми, її змикання та вплив попереднього натягу в доїльному стакані на технологічні параметри роботи доїльного стакана і зусилля змикання.

Всі твердження ґрунтуються на експериментальних даних, застосування нового матеріалу або інших конструкційних параметрів необхідні експериментальні дослідження щодо висновку умов експлуатації.

**Мета роботи** – провести моделювання деформації дійкової гуми в залежності від її конструкційних параметрів і фізико-механічних характеристик та технологічних параметрів процесу, що уможливить виявити вплив монтажного натягу на характер індикаторної діаграми роботи доїльного стакана.

**Основна частина.** Нами розроблена аналітична модель деформацій дійкової гуми в залежності від конструкційних і технологічних її параметрів [1]. Дійкова гума, як циліндрична оболонка, розміщена в доїльному стакані, защемлена у двох кінцях і з попереднім натягом. Зусилля натягу діє на кінцях циліндра і становить  $F_H/2$ . Зі сторони циліндричної частини діє атмосферний тиску, а у внутрішньому просторі – вакуумметричний тиск, по зовнішній поверхні циліндра буде рівномірно розподілений тиск  $p_H$ . Товщина циліндричної частини, що закріплена по торцях, рівна  $h$ . Система координат циліндрична  $x$  і  $\phi$ .

Рівняння деформації дійкової гуми має вигляд [1]: поздовжньої

У рівняннях (1), (2) і (3) наступні параметри:  $R$  – радіус дійкової гуми, м;  $E$  – модуль пружності, Н/м<sup>2</sup>;  $h$  – товщина дійкової гуми, м;  $p_H$  – вакуумметричний тиск, Н/м<sup>2</sup>;  $l$  – довжина активної частини дійкової гуми, м;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\phi$  – центральний кут, град.;  $F_H$  – сила натягу дійкової гуми, Н;  $x$  – довільна віддаль від одного з кінців дійкової гуми, м.

$$U = \frac{1}{E \cdot h} \cdot \left[ \frac{p_H}{R} \cdot (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \times \left( \frac{l^2 \cdot x}{8} - \frac{l \cdot x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{l^3}{48} \right) + \frac{F_H}{4 \cdot \pi \cdot R \cdot h} \cdot \left( \frac{l \cdot x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{l}{8} \right) + \nu \cdot p_H \cdot R \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot \left( \frac{l}{2} - x \right) \right]; \quad (1)$$

кругової

$$\vartheta = -\frac{1}{R \cdot E \cdot h} \times \left[ \frac{p_H}{R} \cdot \left( \frac{l^2 \cdot x^2}{16} - \frac{l \cdot x^3}{12} + \frac{x^4}{24} - \frac{l^3 \cdot x}{48} \right) \times (-4 \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi) + \nu \cdot p_H \cdot R \times (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \cdot \left( \frac{l \cdot x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \right] + \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E \cdot h} \cdot p_H \cdot \sin \phi \times \cos \phi \cdot \left( \frac{l \cdot x}{2} - \frac{x^2}{2} \right); \quad (2)$$

радіальної

$$w = \frac{1}{R \cdot E \cdot h} \times \left[ \frac{p_H}{R} \cdot \left( \frac{l^2 \cdot x^2}{16} - \frac{l \cdot x^3}{12} + \frac{x^4}{24} - \frac{l^3 \cdot x}{48} \right) \times 4 \cdot (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) - \nu \cdot p_H \cdot R \times 4 \cdot (\cos \phi \cdot \sin \phi) \cdot \left( \frac{l \cdot x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \right] + \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E \cdot h} \cdot p_H \cdot (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \times \left( \frac{l \cdot x}{2} - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{R}{E \cdot h} \times \left[ p_H \cdot R \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi - \frac{\nu \cdot p_H}{R} \times (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \cdot \left( \frac{l^2}{8} - \frac{l \cdot x}{2} + \frac{x^2}{2} \right) - \frac{\nu \cdot F_H}{4 \cdot \pi \cdot R \cdot h} \cdot \left( \frac{l}{2} - x \right) \right]. \quad (3)$$

Наведені залежності (1), (2) і (3) дозволяють моделювати деформацію дійкової гуми у поздовжній, круговій і радіальній площинах в залежності від її конструкційних параметрів та фізико-механічних характеристик матеріалу.

Моделювання деформації дійкової гуми проводили за наступних вихідних даних: радіус  $R = 0,01$  м; довжина активної частини дійкової гуми (віддалі між защемленими кінцями гуми)  $l = 0,14$  м; товщина дійкової гуми  $h = 0,002$  м; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,47$ ; модуль пружності  $E = 100$  МПа; сила натягу дійкової гуми  $F_H = 60$  Н; вакуумметричний тиск  $p_H = 48$  кПа. Результати моделювання наведено на рис. 1.

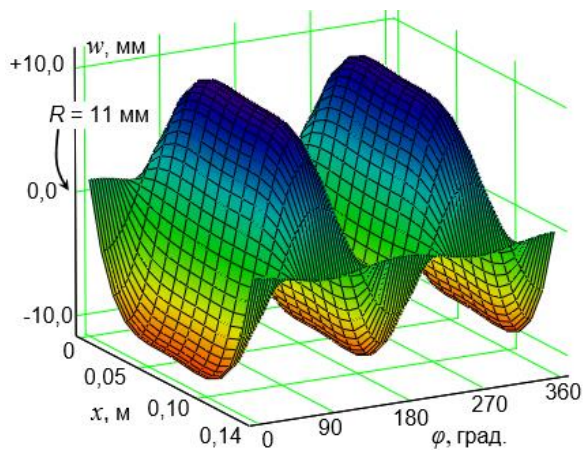


Рис. 1. Характер радіальної деформації ( $w$ ) по довжині ( $x$ ) активної частини і центрального кута ( $\varphi$ ) повороту радіуса  $R$  для дійкової гуми круглого перерізу

Для тригранної дійкової гуми результати моделювання наведені на рис. 2.

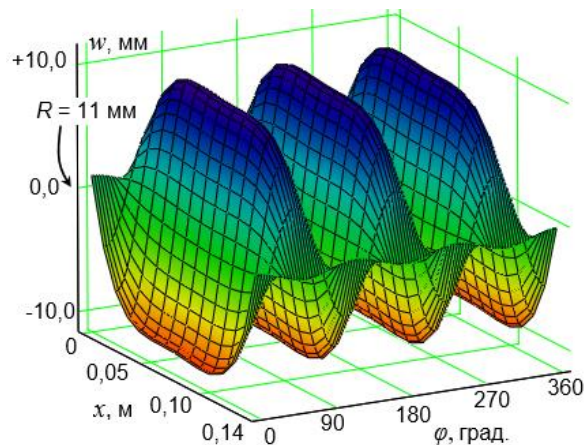


Рис. 2. Характер радіальної деформації ( $w$ ) по довжині ( $x$ ) активної частини і центрального кута ( $\varphi$ ) повороту радіуса  $R$  для дійкової гуми тригранного перерізу

Аналіз результатів моделювання показує, що для дійкової гуми максимальна радіальна деформація, за відсутності дійки, відбувається у середньому перерізі її активної частини.

Характер деформації відповідає формі поперечного перерізу гуми (рис. 3 і 4).

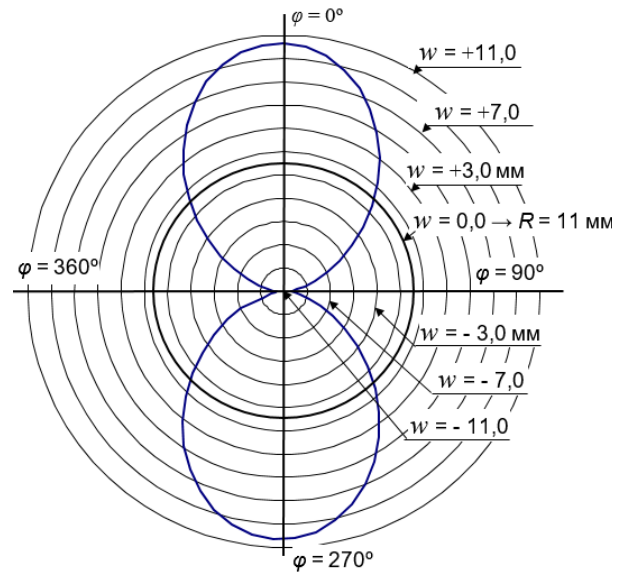


Рис. 3. Характер деформації активної частини дійкової гуми круглого поперечного перерізу на віддалі  $x = 0,07$  м від початку защемлення

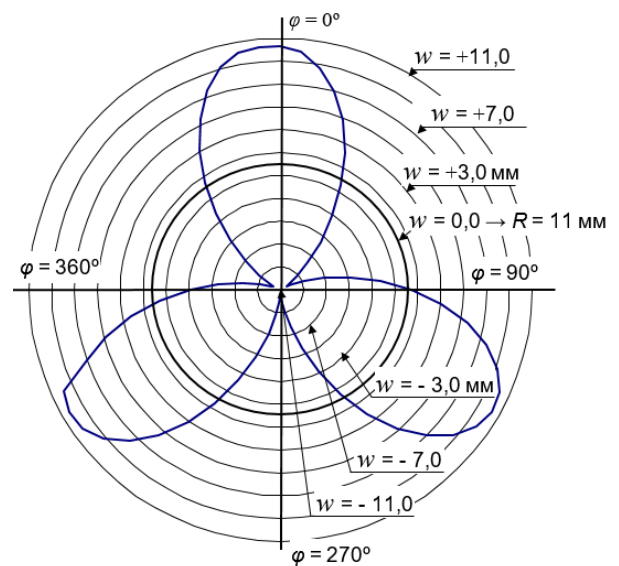
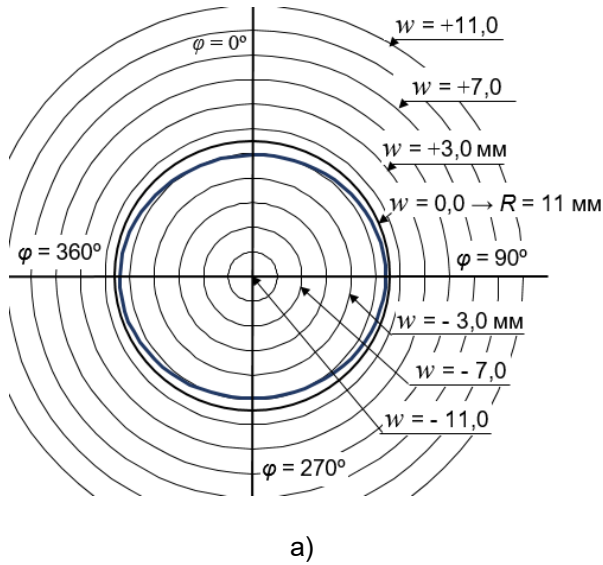
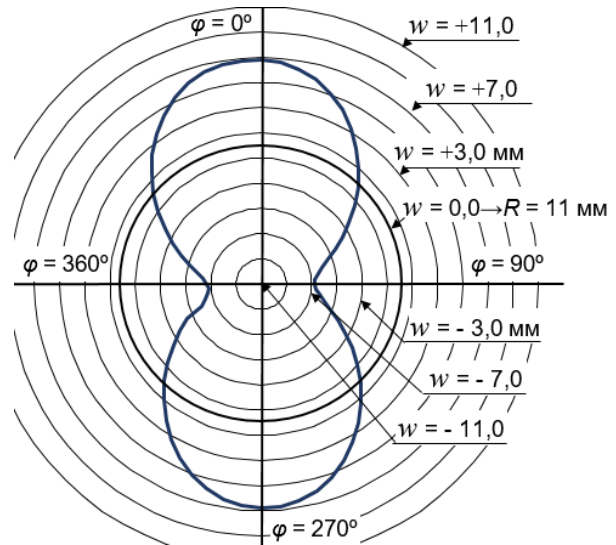


Рис. 4. Характер деформації активної частини дійкової гуми тригранного поперечного перерізу на віддалі  $x = 0,07$  м від початку защемлення

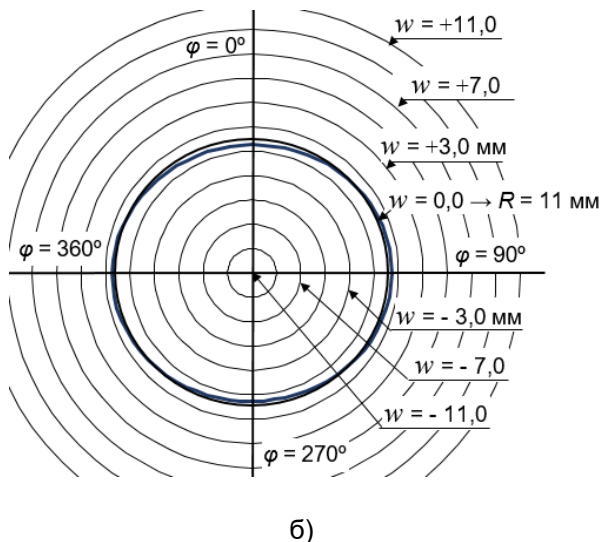
Важливим є вивчити вплив натягу дійкової гуми на характер її деформації та величину деформації за навантаження вакуумметричним тиском. Для цього проведено моделювання за натягу дійкової гуми  $F_H = 60$  Н (рис. 5,а) і за відсутності натягу (рис. 5,б) безпосередньо після защемлення дійкової гуми, та відповідно на віддаль  $x = 10$  мм (рис. 6, а і б) і  $x = 15$  мм (рис. 7, а і б).



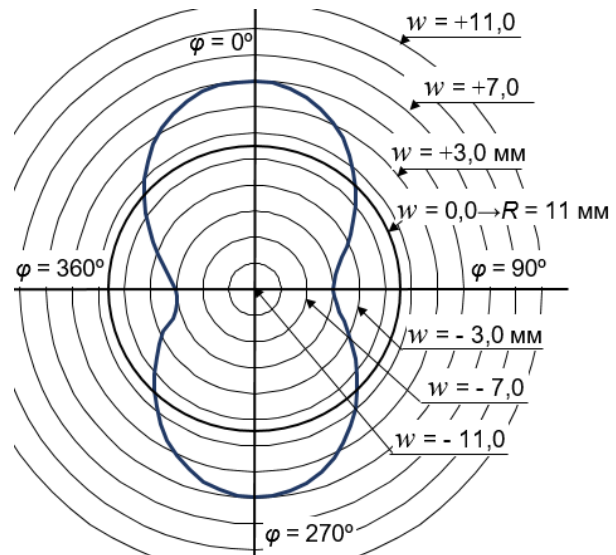
а)



а)



б)



б)

Рис. 5. Характер деформації активної частини дійкової гуми круглого поперечного перерізу безпосередньо після защемлення:  
 а – з попереднім натягом  $F_H = 60$  Н;  
 б – без попереднього натягу

Результати моделювання показують, що за попереднього натягу дійкової гуми безпосередньо після защемлених кінців є деформація до 1 мм у вигляді незначно вираженого еліпсоїда (рис. 5). На віддалі до  $x = 10$  мм від обох защемлених кінців (рис. 6) за вакууму 48 КПА дійкова гума круглого перерізу деформується у вигляді форми “гантелі”, однак за попереднього натягу  $F_H = 60$  Н максимальна деформація у місці найбільшого прогину досягає  $w = -7$  мм від радіуса дійкової гуми  $R = 11$  мм в сторону сплющення (рис. 6, а), а без попереднього натягу максимальна деформація у місці найбільшого прогину досягає  $w = -5$  мм (рис. 6, б).

Рис. 6. Характер деформації активної частини дійкової гуми круглого поперечного перерізу на віддалі  $x = 0,01$  м від кінця защемлення:  
 а – з попереднім натягом  $F_H = 60$  Н;  
 б – без попереднього натягу

На віддалі від защемлення  $x = 0,015$  м дійкова гума з попереднім натягом менше деформується, ніж дійкова гума без попереднього натягу. За вакуумметричного тиску 48 КПА з попереднім натягом  $F_H = 60$  Н максимальна деформація у місці найбільшого прогину досягає  $w = -6,5$  мм (рис. 7, а), тоді як без попереднього натягу максимальна деформація у місці найбільшого прогину досягає  $w = -8,8$  мм (рис. 7, б) від радіуса дійкової гуми  $R = 11$  мм в сторону сплющення.

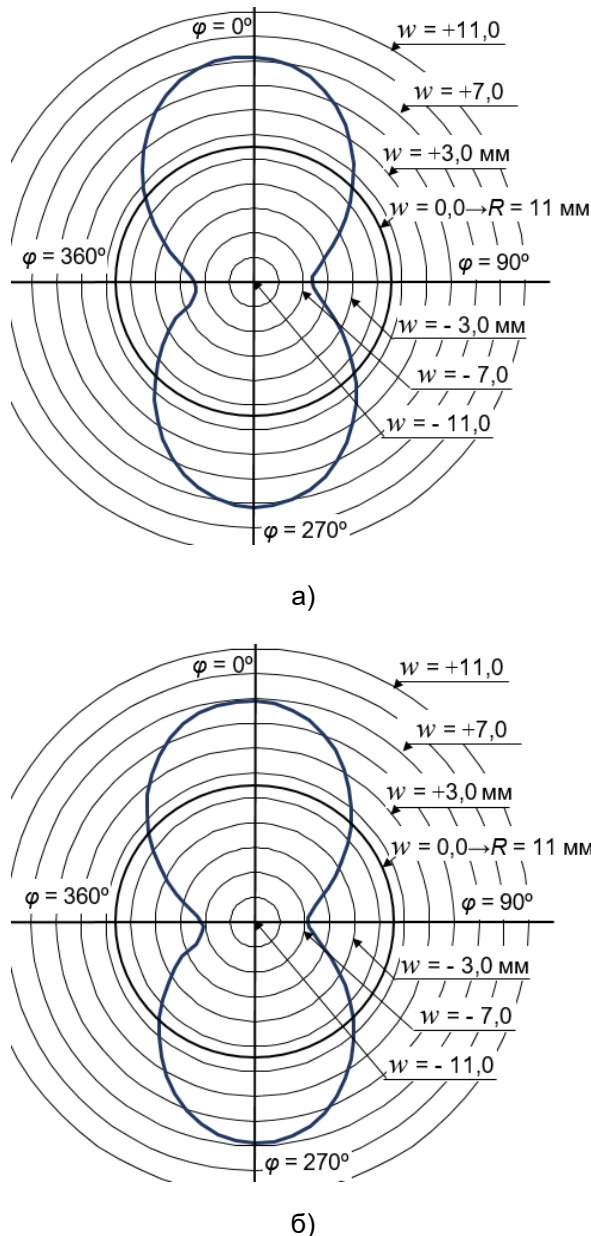


Рис. 7 - Характер деформації активної частини дійкової гуми круглого поперечного перерізу на віддалі  $x = 0,015$  м від кінця защемлення: а – з попереднім натягом  $F_H = 60$  Н; б – без попереднього натягу

Попередній натяг дійкової гуми спричинює видовження сплющеної гуми у напрямку перпендикулярному до напрямку максимального сплющення, і величина цього видовження є більша, ніж за відсутності попереднього натягу.

Необхідно констатувати, що враховуючи защемлення дійкової гуми з обох кінців, у поперечному перерізі по середині активної частини повздовжні напруження, які виникають у наслідок попереднього натягу і деформації гуми, дорівнюють нулю.

Результати моделювання дозволяють проаналізувати вплив конструкційних розмірів системи “доїльний стакан-дійкова гума” і фізико-механічних характеристик матеріалу на характер змикання та обґрунтувати раціональні параметри доїльного стакана для уможливлення його адаптивної роботи.

### Висновок

Аналіз результатів моделювання показує, що попередній натяг дійкової гуми на характер її змикання за дії вакуумметричного тиску не впливає. Натяг часткове змінює величину деформації.

Однак, попередній натяг дійкової гуми забезпечує початкову деформацію у перерізі безпосередньо після защемлення, зменшуючи діаметр, і уможливорює надійне утримування доїльного стакана на дійці корови.

### Література

1. Дмитрів В.Т. Аналітична модель дійкової гуми з попередніми навантаженнями / В.Т. Дмитрів, І.В. Дмитрів, Б.С. Красниця // *Механізація та електрифікація сільського господарства: загальнодержавний збірник*. 2019. Вип. № 9 (108). – Глеваха, ННЦ „ІМЕСГ”, 2019. С. 99 - 106.
2. Reitsma, S.Y. and Breckman D.K. Measurement and analysis of milking machine teat cup operation. *CANADIAN AGRICULTURAL ENGINEERING*. VOL. 27. 1985. NO. 2. *Can. Agric. Eng.* 27: 91 - 97.
3. Karas I., Gálik R., Pogran Š., Šesták M., Computer simulation of the teat-cup liner stress and strain tensor. *Res. Agr. Eng.*, Vol. 59. 2013. No. 3: P. 114 - 119.
4. Davis, M. A., Reinemann, D. J., & Mein, G. A. 2001. 'Development and testing of a device to measure the compressive teat load applied to a bovine teat by the closed teatcup liner. ASAE Paper Number 013007, presented at the 2001 ASAE Annual International Meeting, Sacramento, California. July 29-August 1. URL : [www.uwex.edu/uwmrll/pdf/MilkMachine/Liners/07\\_NMC\\_CL\\_Variation\[1\].pdf](http://www.uwex.edu/uwmrll/pdf/MilkMachine/Liners/07_NMC_CL_Variation[1].pdf) (дата звернення 26.05.2019).
5. O'Shea, J. & O'Callaghan, E. Milking performance of commercial clusters with standard pulsation. In: *Experiments on milking machine components at Moorepark 1976-1979*. An Foras Taluntais. 1980.
6. Akam, D. & S. B. Spencer. Design and operation of milking machine components. Chapter 5 in "Machine Milking and Lactation". Insight Books, Vermont, USA. Eds, A.J. Bramley, F.H. Dodd, G.A. Mein & J.A. Bramley. 1992.

### References:

1. Dmytriv V., Dmytriv I., Krasnytsia B. (2018) Analitichna model diikovoї humy z poperednimy navantazhenniamy. Mekhanizatsiia ta elektryfikatsiia silskoho hospodarstva: zahalnoderzhavnyi zbirnyk. Vyp. № 9 (108). Hlevakha, NNTs „IMESH”, p. 99-106.
2. Reitsma, S.Y. and Breckman D.K. (1985) Measurement and analysis of milking machine teat cup operation. CANADIAN AGRICULTURAL ENGINEERING. VOL. 27. NO. 2. Can. Agric. Eng. 27: p. 91 - 97.
3. Karas I., Gálík R., Pogran Š., Šesták M. (2013) Computer simulation of the teat-cup liner stress and strain tensor. *Res. Agr. Eng.*, Vol. 59. No. 3: P. 114 - 119.
4. Davis, M. A., Reinemann, D. J., & Mein, G. A. (2001) Development and testing of a device to measure the compressive teat load applied to a bovine teat by the closed teatcup liner. ASAE Paper Number 013007, presented at the 2001 ASAE Annual International Meeting, Sacramento, California. July 29-August 1. URL : [www.uwex.edu/uwmril/pdf/MilkMachine/Liners/07\\_NMC\\_CL\\_Variation\[1\].pdf](http://www.uwex.edu/uwmril/pdf/MilkMachine/Liners/07_NMC_CL_Variation[1].pdf) (data zvernennia 26.05.2019).
5. O'Shea, J. & O'Callaghan, E. (1980) Milking performance of commercial clusters with standard pulsation. In: Experiments on milking machine components at Moorepark 1976 - 1979. An Foras Taluntais.
6. Akam, D. & S. B. Spencer. (1992) Design and operation of milking machine components. Chapter 5 in "Machine Milking and Lactation". Insight Books, Vermont, USA. Eds, A.J. Bramley, F.H. Dodd, G.A. Mein & J.A. Bramley.

### Аннотация

## Моделирование деформации тонкостенного цилиндра, как изотропного тела в виде сосковой резины

И.В. Дмитрив

Статья приурочена проблеме моделирования деформации сосковой резины доильного стакана, как изотропного тела в виде тонкостенного цилиндра. За основу взята разработанная аналитическую модель сосковой резины с учетом ее предварительного натяжения, конструкционно-технологических параметров и физико-механических характеристик материала резины для моделирования деформаций в радиальной, продольной и круговой плоскостях.

Основным параметром смыкания сосковой резины – это радиальная деформация по всей длине активной части в зависимости от конструктивных параметров и физико-механических характеристик резины. Параметры для моделирования деформации -  $R$  – радиус сосковой резины,  $E$  – модуль упругости,  $h$  - толщина сосковой резины,  $p_n$  – вакуумметрическое давление,  $l$  – длина активной части сосковой резины,  $\nu$  – коэффициент Пуассона для резины,  $F_n$  – сила предварительного натяжения сосковой резины. В зависимости от центрального угла в радиальной плоскости сечения моделируется форма деформации сосковой резины по всей ее рабочей длине. При предварительном натяжении сосковой резины непосредственно после защемленных концов деформация составляет до 1 мм в виде незначительно выраженного эллипсоида. На расстоянии до 10 мм с обоих защемленных концов при вакууме 48 КПа сосковая резина круглого сечения деформируется в виде формы “гантели”, при предварительном натяжении 60 Н максимальная деформация в сечении максимального прогиба составляет 7 мм от радиуса сосковой резины 11 мм в сторону смыкания, а без предварительного натяжения максимальная деформация в сечении максимального прогиба составляет 5 мм.

Анализ результатов моделирования показал, что предварительное натяжение сосковой резины на характер ее смыкания, под действием вакуумметрического давления, не влияет. Натяжение частично изменяет величину деформации. Предварительное натяжение сосковой резины обеспечивает начальную деформацию в сечении непосредственно после защемления, уменьшая диаметр, и способствует надежному удержанию доильного стакана на соске коровы.

**Ключевые слова:** резина сосковая, деформация радиальная, модуль упругости, натяжение, изотропная среда, модель, цилиндр

**Abstract**

**Modeling of deformation of a thin-walled cylinder  
as an isotropic body in the form of a rubber**

**I.V. Dmytriv**

The article deals with the problem of deformation a liner of a milking cup, as an isotropic body in the form of a thin-walled cylinder. Based on the developed analytical model of a liner, taking into account its pre-tension, structural and technological parameters and physical and mechanical characteristics of the rubber material for modeling deformations in the radial, longitudinal and circular planes.

The main parameter of the closure of the liner is its radial deformation on the entire active part, depending on the design parameters and the physical and mechanical characteristics of the rubber. The parameters for deformation modeling are  $R$  - radius of the liner,  $E$  - modulus of elasticity,  $h$  - thickness of the liner,  $p_H$  - vacuum pressure,  $l$  - length of the active part of the liner,  $\nu$  - Poisson coefficient for rubber,  $F_n$  - force of the actual liner. Depending on the central angle, the deformation shape of the liner along its entire working length is modeled in the radial cross-section plane. Under pre-tensioning of the liner, there is a deformation of up to 1 mm in the form of a slightly expressed ellipsoid immediately after the pinched ends. At a distance of up to 10 mm from both stranded ends at a vacuum of 48 KPa, the liner of the circular cross section is deformed in the form of a "dumbbell", however, with a pre-tension of 60 N, the maximum deformation at the place of greatest deflection reaches 7 mm from the radius of the liner 11 mm towards the flattening, and without pre-tensioning the maximum deflection at the point of maximum deflection reaches 5 mm.

The analysis of the simulation results shows that the pre-tension of the rubber does not affect the nature of its closure under vacuum pressure. The tension partially changes the amount of deformation. However, pre-tensioning of the rubber provides initial deformation in the cross section immediately after pinching, reducing the diameter, and allowing the milking cup to be held securely by the cow.

**Keywords:** *rubber, radial deformation, modulus of elasticity, tension, isotropic medium, model, cylinder.*

**Бібліографічне посилання/ Bibliography citation: Harvard**

Dmytriv I. (2020). Modeling of deformation of a thin-walled cylinder as an isotropic body in the form of a rubber. *Engineering of nature management*, (1(15), pp. 59 - 65.

*Подано до редакції / Received: 23.01.2020*