



УДК 539.3

## До розрахунку механічних систем активного віброзахисту

А.Г. Куценко

Національний університет біоресурсів і природокористування України  
(м. Київ, Україна), [ananas75@meta.ua](mailto:ananas75@meta.ua)

Представлена балка з двома типами періодичного закріплення. Розглянуто поширення гармонічних хвиль в такій одновимірній періодичній механічній системі. На основі теорії Флоке для одновимірних періодичних структур отримано розв'язок.

Аналіз даного розв'язку показав, що частотним діапазонам поширення хвиль – «вікнам прозорості» - відповідають ділянки дисперсійних кривих, які повністю лежать в площині дійсних значень. Це означає, що «вікна прозорості» обох хвиль утворюють дві системи взаємно доповнюючих частотних інтервалів, тобто, якщо для деякого частотного інтервалу, наприклад для низьких частот збудження, буде поширюватися хвиля в лівій частині балки, то хвиля в правій частині балки розповсюджуватися не буде, та навпаки.

Було встановлено цікавий факт, що хвилі в лівій та правій частинах балки не можуть поширюватися одночасно. Для будь-якої частоти збудження завжди поширюється лише одна з вказаних хвиль. Дане явище може бути практично використане для направленої підводу/відводу енергії коливань в системах віброзахисту.

**Ключові слова:** *періодична система, коливання, «вікна прозорості», балка, гармонічна хвиля.*

**Вступ.** Задачі віброзахисту в будівництві та машинобудуванні посідають важливе місце у сучасній інженерній справі [1, 7 - 9]. Це зумовлено тим, що розробка методів та засобів віброзахисту підвищує ефективність роботи машин та покращує умови праці людини.

На сьогодні значно зросли механічні навантаження, а також діапазон частот їх дії на машини та прилади [4, 6].

Існують різні засоби захисту від небажаних вібрацій: демпфери, пружини, амортизатори (пасивні, регульовані, активні) і так далі, які дозволяють знижувати дії вібраційних навантажень на усьому діапазоні частот.

Найбільш ефективними серед них є активні амортизаційні системи [5], оскільки окрім елементів демпфування в них є присутніми елементи з додатковим джерелом енергії, що дозволяють змінювати жорсткість підвісів амортизаторів, що дозволяє зменшити вплив небажаних вібраційних навантажень. Активні амортизаційні системи призначені для зниження амплітуди вібрацій не лише на резонансних частотах, але і на усьому необхідному діапазоні частот за рахунок введення компенсуючих сигналів і реалізації способу зміни жорсткості регульованих підвісів систем.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій.

До останніх можна віднести механічні системи, які завдяки своїй специфічній будові та закріпленню можуть теж використовуватись як елементи активного віброзахисту. Мова йде про механічні системи, які мають періодичну будову чи періодичним чином закріпленні. Оскільки саме такі системи мають властивість пропускати збудження лише окремих частотних діапазонів. Це явище ще відзначив в свій час І.Ньютон при обчисленні швидкості звуку. Отже, якщо відомі наперед частоти шкідливих коливань, то можна так налаштувати періодичну систему, що коливання будуть затухати при проходженні перших періодів такої системи і основна задача віброзахисту буде розв'язана автоматично.

До найпростіших механічних періодично структурованих систем відносяться балки, які закріплені періодичним чином. Автором раніше були розглянуте явище поширення хвиль згину вздовж однорідних нескінченних балок закріплених періодичним чином: шарнірно та пружно [2].

У кожному випадку неоднорідності було знайдено та проведено аналіз дисперсійної кривої хвилі, що поширюється у відповідній балці. Виявилось, що у таких системах «вікна прозорості» (частотні інтервали, що відповідають хви-

лям, амплітуда яких не зменшується від періоду до періоду) обмежені значеннями резонансних частот коливань елементарних періодів балок з певними умовами закріплення. У випадку шарнірно закріпленої балки нижні межі «вікон прозорості» відповідають резонансним частотам шарнірно закріпленого прольоту еквівалентному періоду, а верхні межі — жорстко закріпленому. Для пружно закріпленої балки відповідні частоти є резонансними частотами коливань балки, закріпленої на своїх кінцях пружно за прогином та жорстко за кутом нахилу та навпаки.

Збільшення неоднорідності балки призводить до звуження «вікон прозорості». Якщо спрямувати параметри системи до значень, які відповідають однорідній незакріпленій балці (що можна зробити у випадку пружно закріпленої балки), то всі «вікна прозорості», розширюючись, заповнять увесь частотний діапазон.

**Мета дослідження.** Для узагальнення вище сказаного, доцільно розглянути задачу про поширення гармонічних хвиль у нескінченній періодично закріпленій балці, ліва частина якої закріплена пружно, а права — шарнірно та знайти діапазони частот хвиль, які поширюються вздовж такої однорідної системи, тобто встановити так звані «вікна прозорості».

**Постановка задачі.** Розглянемо поведінку гармонічних хвиль в одновимірній системі з розподіленими параметрами, яка складається з двох доповнюючих одна одну напівобмежених частин, кожна зі своїм типом періодичної структурованості. У якості такої системи вибрана нескінченна однорідна балка, ліва частина якої періодично закріплена за допомогою штифтових опор, а права — за допомогою шарнірних (рис.1).

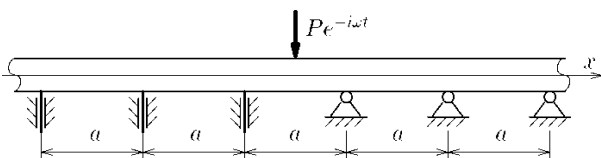


Рис. 1. Схема балки з двома типами періодичних закріплень

Під штифтовою опорою розуміється опора, яка не чинить опору прогинові балки, але фіксує у відповідному перерізі нульовий кут нахилу. Шарнірна опора, навпаки, не чинить опір повороту перерізу балки, але залишає нульовим прогин. Відстань між усіма опорами вважається однаковою і відповідає періоду  $a$ . У якості зовнішнього збудження вибрана зосереджена перерізуюча сила амплітуди  $P$ , яка змінюється за гармонічним законом і прикладена до середнього перерізу прольоту з різними типами опор.

Результати досліджень. Одержимо розв'язок даної задачі із застосуванням теореми Флоке [3, 10]. Для цього балку розіб'ємо на три частини так, як це зображено на рис. 2 Для кожної з напівобмежених частин балки розв'язок може бути представлений у вигляді квазіперіодичної хвилі довільної амплітуди.

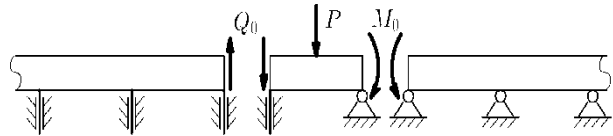


Рис. 2. Еквівалентне розбиття балки

Для правої, шарнірно закріпленої частини балки амплітуда прогинів задається виразом:

$$w(x) = \frac{M_0 S_R^n}{2p^2 EJ} \begin{bmatrix} \cos(px_n) - \operatorname{ch}(px_n) + \\ + (S - \cos(pa)) \frac{\sin(px_n)}{\sin(pa)} - \\ - (S - \operatorname{ch}(pa)) \frac{\operatorname{sh}(px_n)}{\operatorname{sh}(pa)} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де,  $n = 0, 1, 2, \dots$  — номер лівої опори відповідного прольоту,  $0 < x_n = x - (n + 1/2)a < a$  — локальна координата на  $n$ -му прольоті,  $M_0$  — згинаючий момент, який діє в перерізі нульової, тобто крайньої лівої, опори. Вираз (1) знаходиться як розв'язок однорідної задачі на відшукування квазіперіодичної хвилі в шарнірно закріпленій однорідній балці [2], якщо у відповідності до теорії Флоке підставити загальний розв'язок рівняння стаціонарних коливань балки:

$$w_n(x_n) = A \cos(px_n) + A \sin(px_n) + A \operatorname{ch}(px_n) + A \operatorname{sh}(px_n) \quad (2)$$

в однорідні граничні умови, які у даному випадку набувають вигляд:

$$\begin{aligned} w_n(0) = w_n(a) = 0, \\ \left. \frac{dw_n}{dx_n} \right|_{x_n=a} = S_R \left. \frac{dw_n}{dx_n} \right|_{x_n=0}, \\ \left. \frac{d^2 w_n}{dx_n^2} \right|_{x_n=a} = S_R \left. \frac{d^2 w_n}{dx_n^2} \right|_{x_n=0}. \end{aligned} \quad (3)$$

З (2) та (3) одержуємо також рівняння відносно мультиплікатора  $S_R$ .

Аналогічний за своєю структурою розв'язок знаходимо для лівої напівобмеженої частини балки. Амплітуда відповідних прогинів визначається з точністю до значення перерізуючої сили  $Q_0$ , що діє в крайньому правому перерізі, а мультиплікатор  $S_L$  — як розв'язок рівняння (3).

Таким чином, для амплітудної функції прогинів на третій, обмеженій частині балки, що складається лише з одного прольоту, маємо граничні умови:

$$\begin{aligned} w(a/2) = 0, \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=-a/2} = 0, \\ \left. \frac{d^2w}{dx^2} \right|_{x=a/2} = -\frac{M_0}{EJ}, \quad \left. \frac{d^3w}{dx^3} \right|_{x=-a/2} = -\frac{Q_0}{EJ} \end{aligned}$$

та умову прикладання зовнішнього навантаження:

$$\left. \frac{d^3w}{dx^3} \right|_{x=0} - \left. \frac{d^3w}{dx^3} \right|_{x=-0} = -\frac{P}{EJ}.$$

Дані умови можуть бути легко задоволені, якщо розв'язок представити у вигляді суперпозиції функції впливу амплітуди  $P$  та загально-го розв'язку типу (2). Після цього значення згинаючого моменту  $M_0$  та перерізуючої сили  $Q_0$  знаходяться з умов неперервності кінематичних характеристик вздовж всієї балки:

$$w(-a/2-0) = w(-a/2+0), \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=a/2-0} = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=a/2+0}.$$

Отриманий таким чином однозначний розв'язок можна представити у вигляді:

$$P_0 = \delta, \quad P_n = \gamma S_R^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

де  $\delta, \gamma$  — довільні сталі, а  $S_R$  найменший за модулем рівняння:

$$t^2 - 2b_R t + 1 = 0, \quad (5)$$

де

$$b_R = \frac{\sin(pa) \operatorname{ch}(pa) - \operatorname{sh}(pa) \cos(pa)}{\sin(pa) - \operatorname{sh}(pa)},$$

що остаточно підтверджує правомірність застосування теорії Флоке до задач даного типу.

Цікаво проаналізувати поведінку системи для різних частот збудження. Для цього введемо константи поширення  $k_L$  та  $k_R$ , які задаються співвідношеннями:

$$S_L = e^{ik_L a}, \quad S_R = e^{ik_R a} \quad (6)$$

для хвиль, що поширюються в лівій та правій частинах балки відповідно. Безпосередньою підстановкою останнього в (6) співвідношення в (1) можна переконатися, що  $k_R$  є хвильовим числом хвилі, що поширюється в правій частині балки. Аналогічний фізичний зміст має стала  $k_L$  — хвильове число хвилі, яка біжить вздовж балки від перерізу збудження вліво.

На рис. 3 зображені дисперсійні співвідношення для обох хвиль. Тонкою лінією зображено

дисперсійну криву для хвилі в лівій частині балки ( $k_L a$ ), а товстою — в правій ( $k_R a$ ).

Суцільними лініями позначено проекції дисперсійних кривих на площину дійсних значень хвильових чисел. В місцях, де дисперсійні криві залишають площину дійсних значень, їх траєкторії в площині, паралельній площині уявних значень, зображено штриховими лініями у вигляді «петель».

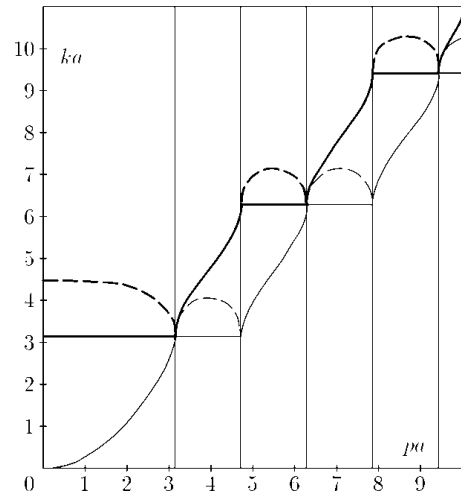


Рис. 3. Дисперсні криві

Виходячи з (6) та означення мультиплікатора, можна стверджувати, що «вікнам прозорості» відповідають ділянки дисперсійних кривих, які повністю лежать в площині дійсних значень. Тому «вікна прозорості» обох хвиль утворюють дві системи взаємно доповнюючих частотних інтервалів, тобто, якщо для деякого частотного інтервалу, наприклад для низьких частот збудження, буде поширюватися хвиля в лівій частині балки, то хвиля в правій частині балки розповсюджуватися не буде, та навпаки. Така цікава властивість може знайти своє широке практичне застосування.

Відзначимо, що «вікна прозорості» обох хвиль обмежені резонансними частотами шарнірно закріпленого та жорстко закріпленого окремих прольотів балки.

#### Висновки.

Отже, в результаті проведеного дослідження встановлено, що на кожній з частин балки розв'язок граничної задачі реалізується у вигляді квазіперіодичної хвилі.

Одержані кількісні результати показали, що хвилі в лівій та правій частинах балки не можуть поширюватися одночасно. Для будь-якої частоти збудження завжди поширюється лише одна з вказаних хвиль. Дане явище може бути практично використане для направленої підводу/відводу енергії коливань в системах зі складною структурою.

## Література

1. Крайнев А.Ф. Идеология конструирования [Текст] / А.Ф. Крайнев. – М.: Машиностроение, 2003. – 384 с.
2. Куценко А.Г. Поширення хвиль в балках, закріплених періодичним чином [Текст] // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. - 1997. – № 3. – С. 69 - 76.
3. Куценко А.Г. До теорії Флоке при вивченні вимушених коливань періодично закріплених балок [Текст] // Вісник Житомирського національного агроекологічного університету. Житомир, 2014. № 2 (45), т.4, ч. I. – С. 71 - 78.
4. Осипова М.В. Расчет виброизолированных систем на динамические нагрузки с использованием передаточных функций [Текст] // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2013. – № 4. – С. 18 - 20.
5. Лысенко А.В., Таньков Г.В., Рындин Д.А. Анализ особенностей применения современных активных систем виброзащиты для нестационарных РЭС // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». Пенза: ПГУ, 2013. Том 2. – С. 155 - 158.
6. Санников А.А. Вибрации и шум технологических машин и оборудования лесного комплекса: моногр. / А.А. Санников, В.Н. Старжинский, Н.В. Куцубина, Н.Н. Черемних, В.П. Сиваков, С.Н. Вихарев. – Екатеринбург: Уральск. Гос. Лесотехн. Ун-т. 2006. – 484 с.
7. Чернов Ю.Т. Вибрации строительных конструкций. (Аналитические методы расчета. Основы проектирования и нормирования вибраций строительных конструкций, подвергающихся эксплуатационным динамическим воздействиям): Научное издание. 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство АСВ, 2011. – 384 с.
8. Carels P. «Low vibration & noise track systems with tunable properties for modern metro track construction» Internoise 2000, Nice, France.
9. David Roberts, Barry Murray Parramatta rail link – the approach to controlling train regenerated noise & vibration // Conference On Railway Engineering, Darwin 20-23 Jun 2004.
10. Mead D.J. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964-1995// J. Sound and Vibr. – 1996. – Vol. 190, N3, – P. 495 - 524.

## Аннотация

## К расчету механических систем активной виброзащиты

А.Г.Куценко

Представлена балка с двумя типами периодического закрепления. Рассмотрено распространение гармонических волн в такой одномерной периодической механической системе. На основе теории Флоке для одномерных периодических структур получено решение.

Анализ данного решения показал, что частотные диапазоны обеих волн образуют две системы взаимно дополняющих частотных интервалов, то есть, если некоторого частотного интервала возбуждения, будет распространяться волна в левой части балки, то волна в правой части балки распространяться не будет, и наоборот.

Был установлен интересный факт, что волны в левой и правой частях балки не могут распространяться одновременно. Для любой частоты возбуждения всегда распространяется лишь одна из указанных волн. Данное явление может быть практически использовано в задачах виброзащиты.

**Ключевые слова:** периодическая система, колебание, «окна прозрачности», балка, гармоническая волна.

## Abstract

## To the problem of calculation the mechanical systems of active vibrodefence

A.G. Kutsenko

Girder with two types of the periodic fixing is presented. The propagation of harmonic waves in a one-dimensional periodic mechanical system. Based on the Floquet theory for one-dimensional periodic structures obtained solution. Analysis of the solution showed that the frequency ranges of the two waves form two complementary systems of frequency ranges, that is, if a certain excitation frequency range, will spread a wave on the left side of the girder, the wave on the right side of the girder will not spread, and vice versa. Interesting fact has been established that the waves in the left and right sides of the girders can not be distributed at the same time. For each excitation frequency is always applied only one of these waves. This phenomenon can be practically used in vibration isolation problems.

**Keywords:** periodic system, vibration, «pass bend», beam, harmonic wave.

Представлено: М.М. Кірієнко / Presented by: M.M. Kirienko

Рецензент В.В. Коломієць / Reviewer: V.V. Kolomiets

Подано до редакції / Received: 21.04.2015