

Переробка та зберігання сільськогосподарської продукції
Processing and storage of agricultural products

УДК 534.1:539.3

[https://doi.org/10.37700/enm.2019.4\(14\).32-40](https://doi.org/10.37700/enm.2019.4(14).32-40)Вільні коливання
пружно нелінійного осцилятора з сухим тертямВ.П. Ольшанський¹, В.В. Бурлака², М.В. Сліпченко³*Харківський національний технічний університет сільського господарства
імені Петра Василенка (м.Харків, Україна)**e-mail: ¹ OlshanskiyVP@gmail.com, ² Burlaka2V@ukr.net, ³ Slipchenko_M@ukr.net,
ORCID:¹ 0000-0003-1407-4476, ² 0000-0001-9437-1950, ³ 0000-0002-9728-661X*

Методом енергетичного балансу виведено рекурентні співвідношення для розрахунку послідовності спадаючих амплітуд розмахів дисипативного осцилятора з сухим тертям Кулона. Розглянуто різні варіанти нелінійної пружності коливальної системи. У статті розглянуті випадки коливань осцилятора з наступними показниками нелінійності коефіцієнту пружності: степеневі-нелінійної пружності з варіантами лінійного пружного осцилятора, осцилятора з м'якою характеристиками пружності при різних її значеннях, квадратичною та кубічною нелінійністю; коливання осцилятора за наявності в виразі сили пружності лінійної складової з різними показниками нелінійності. Виділено випадки, коли виведені рекурентні співвідношення мають замкнені аналітичні розв'язки і побудовано їх. Складені рекурентні співвідношення між амплітудами розмахів та запропоновано їх числове розв'язання методом ітерацій Ньютона. Проведено порівняння числових результатів, до яких призводять такі розв'язки та комп'ютерне інтегрування диференціального рівняння руху. Показано повну узгодженість результатів, одержаних різними способами. Запропоновано компактні формули для розрахунку ширини зони застою при різних нелінійностях. Викладений спосіб розрахунку простий в реалізації, бо не потребує розв'язування нелінійного диференціального рівняння вільних коливань осцилятора. При виведенні рекурентних співвідношень задіяно точний аналітичний розв'язок кубічного рівняння, запропонований Кардано. Виявлено варіанти нелінійностей, коли розрахунок зводиться до використання явних рекурентних співвідношень, пов'язаних з розв'язками квадратного та кубічного рівнянь. У випадку довільного показника нелінійності розрахунок амплітуд доводиться проводити методом ітерацій.

Ключові слова: пружно нелінійний осцилятор, степеневі нелінійності, тертя Кулона, вільні коливання, рекурентні співвідношення, метод енергетичного балансу.

Вступ. Вільні коливання лінійних і нелінійних механічних систем з сухим тертям мають обмежену кількість розмахів, що спостерігається на практиці. Тому моделі коливань осциляторів з сухим тертям часто використовують в інженерних розрахунках, сподіваючись на їх адекватність. Вони досить прості у випадку систем з лінійними характеристиками жорсткості. Розрахунок послідовності амплітуд розмахів вдається провести і не розв'язуючи диференціальних рівнянь руху, бо їх спадання відбувається за законом арифметичної прогресії. Закономірності зміни амплітуд ускладнюються при нелінійних характеристиках пружності коливальних систем. Тому вивчення їх потребує окремої уваги.

Аналіз літературних даних та постановка проблеми. Вільні коливання осциляторів з сухим тертям і лінійною характеристикою жорсткості

висвітлені в численних виданнях з теорії коливань [1-4]. Там використано метод припасовування розв'язків диференціального рівняння руху. Більш загальні задачі, коли поряд з тертям Кулона враховано і в'язке або позиційне тертя розглянуто в [1, 5, 6]. В роботі [1] розв'язок подано на фазовій площині. В публікаціях [5, 6], поряд з точними розв'язками, будували і наближені розрахункові формули методом енергетичного балансу, не розв'язуючи диференціальних рівнянь руху. Цей метод раніше використано в [4] при аналізі вільних коливань осцилятора з нелінійним в'язким опором. Показано, що у випадку лінійного в'язкого опору наближений розв'язок переходить у точний для огинаючої графіка коливань. Тут, на відміну від вказаних публікацій, розглянуто подвійно нелінійну коливальну систему з одним

ступенем вільності, що має нелінійну пружну характеристику. Обмежуємось варіантом степеневих нелінійностей.

Метою статті є побудова формул для розрахунку амплітуд розмахів нелінійно пружних осциляторів, при їх вільних коливаннях, спричинених початковим відхиленням від положення рівноваги.

Викладення основного матеріалу. Випадок степенєво-нелінійної пружності. Для нього вільні коливання описуються диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c|x|^\nu \operatorname{sign}(x) + F_T \cdot \operatorname{sign}(\dot{x}) = 0, \quad (1)$$

з початковими умовами:

$$x(0) = -a_0; \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2) m – маса осцилятора; c – коефіцієнт пружності; $\nu > 0$ – показник нелінійності; F_T – сила сухого тертя; $x(t)$ – переміщення осцилятора; t – час; крапка над x означає похідну по t ; a_0 – початкове відхилення осцилятора від положення рівноваги $x = 0$.

Розглянемо i -й розмах коливань, який починається з амплітудного відхилення $x = -a_{i-1}$, та закінчується амплітудним відхиленням a_i , причому $a_i < a_{i-1}$.

На цьому етапі руху зміна потенціальної енергії системи $\Delta\Pi$ становить:

$$\Delta\Pi = \frac{c}{1+\nu} (a_i^{\nu+1} - a_{i-1}^{\nu+1}). \quad (3)$$

Робота сили сухого тертя A_T при цьому дорівнює:

$$A_T = -F_T(a_i + a_{i-1}). \quad (4)$$

У відповідності з методом енергетичного балансу [4]:

$$\Delta\Pi = A_T,$$

або, з урахуванням (3) і (4):

$$a_i^{\nu+1} - a_{i-1}^{\nu+1} + \frac{(1+\nu)F_T}{c} (a_i + a_{i-1}) = 0. \quad (5)$$

Позначенням $\xi = a_i/a_{i-1}$ рівнянню (5) надаємо вигляд:

$$\xi^{\nu+1} + \gamma_i \cdot \xi + \gamma_i - 1 = 0, \quad (6)$$

де

$$\gamma_i = \frac{1+\nu}{c} \cdot \frac{F_T}{a_{i-1}^\nu}.$$

Рівняння (6) виражає зв'язок між a_i та a_{i-1} . При довільних ν його додатній корінь менший одиниці доводиться знаходити числовими методами. Як такий, зручно використати ітераційний метод Ньютона:

$$\xi_{j+1} = \xi_j - \frac{\xi_j^{\nu+1} + \gamma_i \xi_j + \gamma_i - 1}{(1+\nu)\xi_j^\nu + \gamma_i}, j = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

На першому розмасі ($i = 1$) можна задавати $\xi_0 = 1$, а для наступних розмахів прийняти ξ_0 рівним тому значенню ξ_{j+1} , яке знайдено на попередньому розмасі.

Формула (8) має швидку збіжність ітерацій, що зменшує обсяги обчислень.

Область застою осцилятора подається нерівністю:

$$|x| \leq \left(\frac{F_T}{c}\right)^{1/\nu}.$$

Яка при $\nu = 1$ переходить у відомі результати [3, 4]. Для сталого відношення $F_T/c < 1$ збільшення показника ν супроводжується розширенням області застою, а зменшення ν – її звуженням.

Існують окремі значення ν , для яких алгебраїчне рівняння (6) має аналітичні розв'язки. Зупинимось на них окремо.

1. *Варіант лінійно пружного осцилятора.* У цьому випадку $\nu = 1$ і рівняння (6) набуває форму:

$$\xi^2 - 1 + \gamma_i(\xi + 1) = 0 \Rightarrow \xi - 1 = -\gamma_i \Leftrightarrow \xi = 1 - \gamma_i.$$

Звідки, враховуючи (7), отримуємо співвідношення:

$$a_i = a_{i-1} - \frac{2F_T}{c},$$

що є загальновідомим результатом [3, 4], до якого призводить точний розв'язок задачі коливань.

2. *Осцилятор з м'якою характеристикою пружності $\nu = 1/3$.* Для нього (6) зводиться до рівняння:

$$\xi^{4/3} + \gamma_i \cdot \xi + \gamma_i - 1 = 0, \quad (9)$$

у якому

$$\gamma_i = \frac{4}{3c} \cdot \frac{F_T}{\sqrt[3]{a_{i-1}}}.$$

Позначенням $y = \xi^{1/3}$, замість (9), одержуємо кубічне рівняння:

$$y^3 + (\gamma_i - 1)y^2 + (1 - \gamma_i)y + \gamma_i - 1 = 0,$$

що має розв'язок [7]:

$$y = A - B + \frac{1 - \gamma_i}{3}. \quad (10)$$

Тут

$$A = \sqrt[3]{S - 0,5q};$$

$$B = \sqrt[3]{S + 0,5q};$$

$$S = \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2};$$

$$p = 1 - \gamma_i - \frac{1}{3}(1 - \gamma_i)^2;$$

$$q = \frac{(1 - \gamma_i)^2}{3} - \frac{2}{27}(1 - \gamma_i)^3 - (1 - \gamma_i).$$

Обчисливши y , потім легко знайти ξ , бо $\xi = y^3$.

3. *Варіант м'якої характеристики пружності* $\nu = 0,5$. Із (6), (7) випливає, що:

$$\xi^{1,5} + \gamma_i \cdot \xi + \gamma_i - 1 = 0, \quad (11)$$

$$\gamma_i = \frac{3}{2c} \cdot \frac{F_T}{\sqrt{a_{i-1}}}.$$

Заміною $\xi = z^2$ рівняння (11) зводимо до кубічного:

$$z^3 + \gamma_i \cdot z^2 + \gamma_i - 1 = 0.$$

Воно має аналітичний розв'язок:

$$z = \sqrt[3]{S - 0,5q} - \sqrt[3]{S + 0,5q} - \frac{\gamma_i}{3}, \quad (12)$$

у якому

$$S = \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2};$$

$$p = -\frac{1}{3}\gamma_i^2;$$

$$q = \frac{2}{27}\gamma_i^3 + \gamma_i - 1.$$

У підсумку $\xi = z^2$.

4. *Випадок квадратичної нелінійності* $\nu = 2$. Згідно з (6), (7) йому відповідає:

$$\xi^3 + \gamma_i \cdot \xi + \gamma_i - 1 = 0,$$

$$\gamma_i = \frac{3}{c} \cdot \frac{F_T}{a_{i-1}^2}.$$

Обчислення ξ зводиться до використання формули:

$$\xi = \sqrt[3]{S + 0,5(1 - \gamma_i)} - \sqrt[3]{S - 0,5(1 - \gamma_i)}, \quad (13)$$

де

$$S = \sqrt{\frac{1}{27}\gamma_i^3 + \frac{1}{4}(1 - \gamma_i)^2}.$$

5. *Випадок кубічної нелінійності* $\nu = 3$. Замість (6) і (7) маємо:

$$\xi^4 + \gamma_i \cdot \xi + \gamma_i - 1 = 0, \quad (14)$$

де

$$\gamma_i = \frac{4}{c} \cdot \frac{F_T}{a_{i-1}^3}.$$

Рівняння (14) має корінь $\xi = -1$, а тому зводиться до кубічного:

$$\xi^3 - \xi^2 + \xi + \gamma_i - 1 = 0,$$

з аналітичним розв'язком:

$$\xi = \sqrt[3]{S - \frac{\gamma_i}{2} + \frac{10}{27}} - \sqrt[3]{S + \frac{\gamma_i}{2} - \frac{10}{27}} + \frac{1}{3}, \quad (15)$$

у якому

$$S = \sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\gamma_i - \frac{20}{27}\right)^2}$$

Отже, у розглянутих окремих п'яти випадках розрахунок амплітудних розмахів не потребує проведення ітерацій по формулі (8).

Тривалості розмахів можна оцінити за наближеною формулою:

$$t_i = 2^{\nu-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)} \sqrt{\frac{m}{c(1+\nu)}} \times \left[\frac{1}{(3a_{i-1} + a_i)^{\frac{\nu-1}{2}}} + \frac{1}{(3a_i + a_{i-1})^{\frac{\nu-1}{2}}} \right] \quad (16)$$

де $\Gamma(z)$ – гама-функція, затабульована в [8, 9]; $i = 1, 2, \dots$ Вона є точною при $\nu = 1$, коли тривалість i -го розмаху $t_i = \pi\sqrt{m/c}$ не залежить від номера i та амплітудних відхилень осцилятора. Точність формули (16) погіршуються зі зростанням i .

Коливання осцилятора за наявності в виразі сили пружності лінійної складової. Вони описуються диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c_1x + c_2|x|^\nu \text{sign}(x) + F_T \cdot \text{sign}(\dot{x}) = 0, \quad (17)$$

при початкових умовах (2).

Тут c_1, c_2 – коефіцієнти пружності. При $c_1 = 0$; $c_2 = c$ рівняння (17) переходить в (1).

Зміна потенціальної енергії на i -му розмасі тепер становить:

$$\Delta\Pi = \frac{c_1}{2}(a_i^2 - a_{i-1}^2) + \frac{c_2}{1+\nu}(a_i^{\nu+1} - a_{i-1}^{\nu+1}),$$

а рівняння енергетичного балансу має вигляд:

$$a_i^{\nu+1} - a_{i-1}^{\nu+1} + \frac{(1+\nu)c_1}{2c_2}(a_i^2 - a_{i-1}^2) + \frac{(1+\nu)F_T}{c_2}(a_i + a_{i-1}) = 0.$$

Далі подамо його в безрозмірній формі:

$$\xi^{\nu+1} + \alpha_i \cdot \xi^2 + \beta_i \cdot \xi + \beta_i - \alpha_i - 1 = 0, \quad (18)$$

де

$$\alpha_i = \frac{(1+\nu)c_1}{2c_2(a_{i-1})^{\nu-1}}; \beta_i = \frac{(1+\nu)F_T}{c_2(a_{i-1})^\nu}; \xi = \frac{a_i}{a_{i-1}}.$$

При довільних $\nu > 0$ (18) доводиться розв'язувати ітераційним методом по формулі:

$$\xi_{j+1} = \xi_j - \frac{\xi_j^{v+1} + \alpha_i \cdot \xi^2 + \beta_i \cdot \xi + \beta_i - \alpha_i - 1}{(v+1)\xi_j^v + 2\alpha_i \cdot \xi_j + \beta_i}, \quad (19)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots$$

яка переходить в (8) при $\alpha_i = 0; \beta_i = \gamma_i$.

Цей метод зручний і при обчисленні області застою:

$$|x| \leq b \approx b_{j+1}. \quad (20)$$

Тоді:

$$b_{j+1} = b_j - \frac{c_2 b_j^v + c_1 b - F_T}{v c_2 b_j^{v-1} + c_1}, \quad (1)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots$$

Початковим наближенням можна брати $b_0 = F_T/c_1$, що становить половину ширини зони застою лінійно пружного осцилятора.

Зазначимо, що існують такі цілі значення v , для яких рівняння (18) має замкнені аналітичні розв'язки і тоді можна обійтись без використання ітераційної залежності (19).

Розглянемо їх окремо:

1. При $v = 1$ рівняння (18) квадратне. Маємо лінійний осцилятор, у якого еквівалентна жорсткість пружини c дорівнює сумі жорсткостей c_1 і c_2 . Аналітичний розв'язок:

$$\xi = 1 - \frac{\beta_i}{1 + \alpha_i}$$

набуває форму рекурентного співвідношення:

$$a_i = a_{i-1} - \frac{2F_T}{c_1 + c_2}.$$

Зона застою визначається нерівністю:

$$|x| \leq \frac{2F_T}{c_1 + c_2}.$$

Тривалість кожного розмаху не залежить від його номера і становить $t_i = \pi\sqrt{m/(c_1 + c_2)}$.

2. Випадок квадратичної нелінійності $v = 2$. Рівняння (18) стає кубічним:

$$\xi^3 + \alpha_i \cdot \xi^2 + \beta_i \cdot \xi + \beta_i - \alpha_i - 1 = 0.$$

Воно має аналітичний розв'язок:

$$\xi = \sqrt[3]{S - 0,5q} - \sqrt[3]{S + 0,5q} - \frac{\alpha_i}{3}, \quad (21)$$

у якому

$$S = \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2};$$

$$p = \beta_i - \frac{\alpha_i^2}{3};$$

$$q = \frac{2}{27}\alpha_i^3 - \frac{1}{3}\alpha_i\beta_i + \beta_i - \alpha_i - 1.$$

Зона застою визначається нерівністю (20), де

$$b = \sqrt{\left(\frac{c_1}{2c_2}\right)^2 + \frac{F_T}{c_2} - \frac{c_1}{2c_2}}.$$

Оцінку тривалості розмахів можна провести за наближеною формулою:

$$t_i \approx \frac{\pi\sqrt{m}}{\sqrt{c_1 + \frac{4c_2}{3\pi}(a_i + a_{i-1})}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

3. Випадок кубічної нелінійності $v = 3$. Рівняння (18) теж зводиться до кубічного:

$$\xi^3 - \xi^2 + (1 + \alpha_i)\xi + \beta_i - \alpha_i - 1 = 0,$$

з аналітичним розв'язком:

$$\xi = \sqrt[3]{S - 0,5q} - \sqrt[3]{S + 0,5q} + \frac{1}{3}. \quad (22)$$

Тут

$$S = \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2};$$

$$p = \frac{2}{3} + \alpha_i;$$

$$q = \beta_i - \frac{2}{27} - \frac{2}{3}(1 + \alpha_i).$$

Для обчислення розміру зони застою b доводиться теж розв'язувати кубічне рівняння:

$$b^3 + \frac{c_1}{c_2}b - \frac{F_T}{c_2} = 0.$$

У підсумку маємо:

$$b = \sqrt[3]{S + \frac{1}{2}\frac{F_T}{c_2}} - \sqrt[3]{S - \frac{1}{2}\frac{F_T}{c_2}},$$

де

$$S = \sqrt{\frac{1}{27}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{F_T}{c_2}\right)^2}.$$

Оцінка тривалості розмахів зводиться до використання наближеної формули:

$$t_i \approx \frac{\pi\sqrt{m}}{\sqrt{c_1 + \frac{3c_2}{16\pi}(a_i + a_{i-1})^2}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

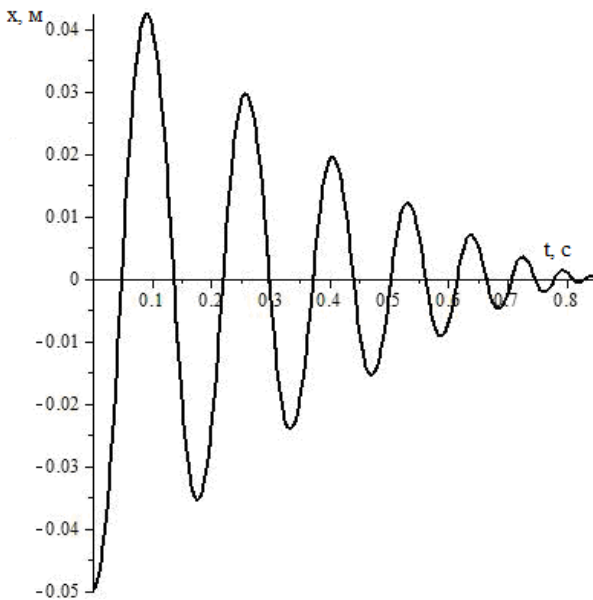
Числові результати та їх порівняльний аналіз. Розглянемо низку прикладів.

Приклад 1. Обчислено послідовність амплітуд розмахів осцилятора з наступними параметрами: $v = 1/3; m = 1 \text{ кг}; c = 135 \text{ Н}\cdot\text{м}^{-1/3}; F_T = 4 \text{ Н}; a_0 = 0,05 \text{ м}$. Одержані з використанням формули (10) значення амплітуд записано в табл. 1.

Таблиця 1. Значення a_i при $\nu = 1/3$

i	$100a_i$, м	i	$100a_i$, м	i	$100a_i$, м
0	5,0000	6	1,5556	12	0,2217
1	4,2370	7	1,2137	13	0,1345
2	3,5557	8	0,9258	14	0,0735
3	2,9516	9	0,6873	15	0,0341
4	2,4199	10	0,4935	16	0,0117
5	1,9561	11	0,3399	17	0,0017

Для порівняння, на рис. 1 зображено графік коливань, одержаний числовим комп'ютерним інтегруванням рівняння (1). На графіку екстремальні відхилення осцилятора від положення $x = 0$ дорівнюють тим, що вказано в табл. 1.

Рис. 1. Графік коливань, одержаний числовим комп'ютерним інтегруванням при $\nu = 1/3$

Приклад 2. За формулою (12), обчислено значення a_i при $\nu = 1/2$; $m = 1$ кг; $c = 224$ Н·м^{-1/2}; $F_T = 4$ Н; $a_0 = 0,05$ м.

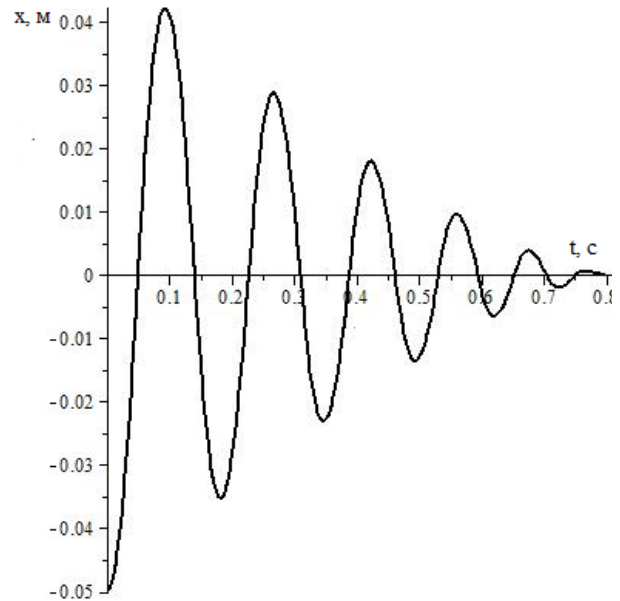
Одержані результати записано в табл. 2.

Таблиця 2. Значення a_i при $\nu = 1/2$

i	$100a_i$, м	i	$100a_i$, м	i	$100a_i$, м
0	5,0000	4	2,3124	8	0,6452
1	4,2324	5	1,7999	9	0,3879
2	3,5287	6	1,3513	10	0,1943
3	2,8887	7	0,9664	11	0,0644

Графік коливань, розрахований числовим інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері, для

вказаних вище числових даних, зображено на рис 2. Маємо повну відповідність значень a_i в таблиці і на рисунку.

Рис. 2. Графік коливань, одержаний числовим комп'ютерним інтегруванням при $\nu = 1/2$

Приклад 3. Для апробації формули (13), тут вона задіяна до обчислень a_i при $\nu = 2$; $m = 1$ кг; $c = 20000$ Н·м⁻²; $F_T = 4$ Н; $a_0 = 0,05$ м. Отримані результати записано в табл. 3.

Таблиця 3. Значення a_i при $\nu = 2$

i	0	1	2	3
$100a_i$, м	5,0000	4,1261	3,0147	1,2366

Маємо лише три розмахи до попадання осцилятора в область застою і це підтверджують результати числового інтегрування рівняння руху, графічно подані на рис. 3.

Приклад 4. Розрахунок проведено при $\nu = 3$, $m = 1$ кг; $c = 4,5 \cdot 10^5$ Н·м⁻²; $F_T = 4$ Н; $a_0 = 0,05$ м. Обчислені по формулі (15) значення a_i записано в табл. 4.

Таблиця 4. Значення a_i при $\nu = 3$

i	0	1	2
$100a_i$, м	5,0000	4,1595	2,7199

Тут процес вільних коливань звівся до двох розмахів. Таку кількість їх маємо і на рис 4, що одержаний як числовий розв'язок задачі Коші.

Наступні приклади стосуються осцилятора, у якого характеристика пружності має лінійну складову та нелінійний доданок.

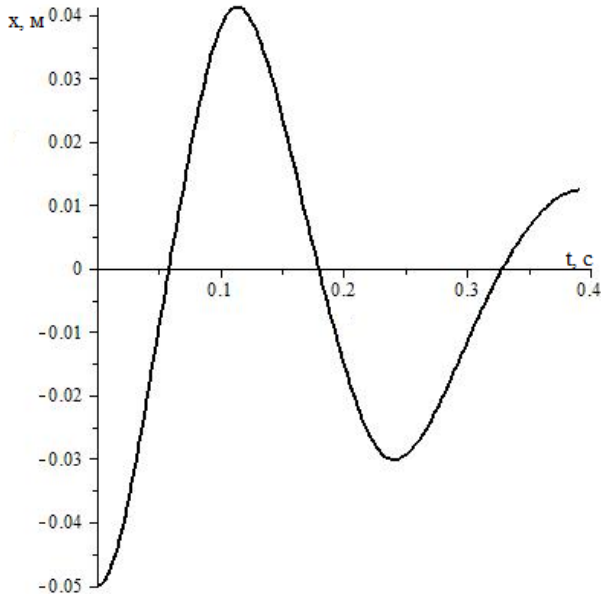


Рис. 3. Графік коливань, одержаний числовим комп'ютерним інтегруванням при $\nu = 2$

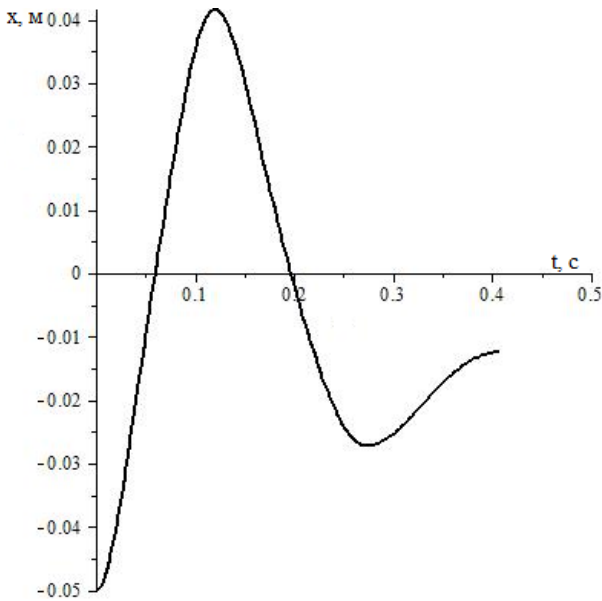


Рис. 4. Графік коливань, одержаний числовим комп'ютерним інтегруванням при $\nu = 3$

Приклад 5. Для розрахунку послідовності амплітуд розмахів прийнято $\nu = 2$, $m = 1$ кг; $c_1 = 1000$ Н/м; $c_2 = \pm 10000$ Н·м⁻²; $F_T = 4$ Н; $a_0 = 0,05$ м. Обчислені по формулі (21) значення a_i записано в табл. 5.

В осцилятора з м'якою характеристикою пружності ($c_2 < 0$) амплітуд розмахів менше, ніж в осцилятора з жорсткою характеристикою пружності ($c_2 > 0$). Результати в табл. 5 повністю відповідають тим, що на рис 5, які отримано числовим інтегруванням диференціального рівняння (17).

Таблиця 5. Значення a_i при додатковій квадратичній нелінійності

i	Значення $100a_i$, м	
	при $c_2 > 0$	при $c_2 < 0$
0	5,0000	5,0000
1	4,4570	3,5884
2	3,8929	2,4374
3	3,3050	1,4397
4	2,6899	0,5449
5	2,0438	-
6	1,3616	-
7	0,6371	-

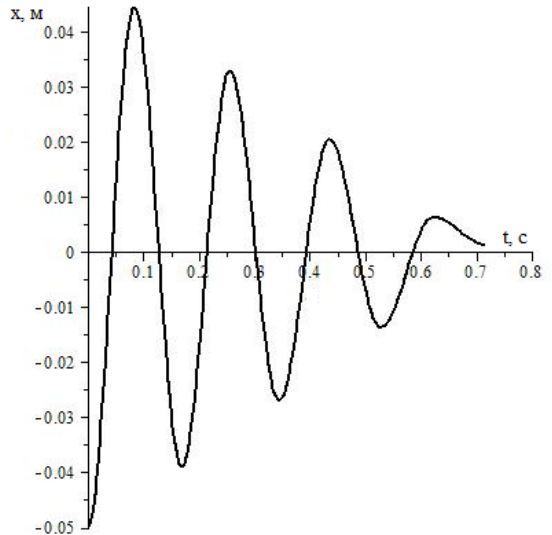
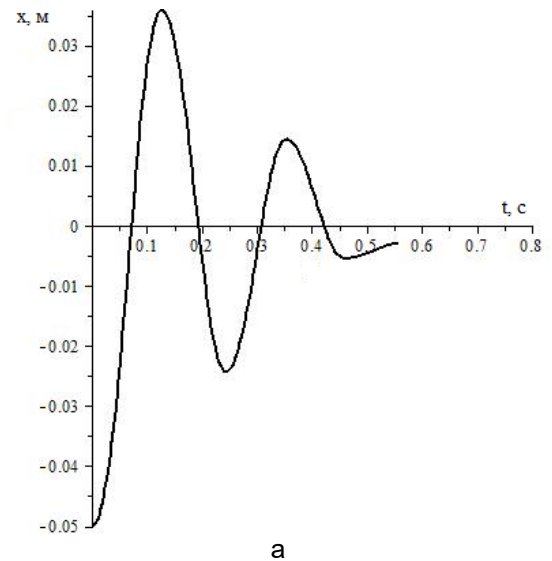


Рис. 5. Графіки коливань при додатковій квадратичній нелінійності, одержані числовим комп'ютерним інтегруванням: а) з м'якою характеристикою пружності ($c_2 < 0$); б) з жорсткою характеристикою пружності ($c_2 > 0$)

Приклад 6. Тут по формулі (22) розраховано послідовності амплітуд коливань осцилятора, в якого: $\nu = 3$, $m = 1$ кг; $c_1 = 10^3$ Н/м; $c_2 = \pm 2 \cdot 10^5$ Н·м⁻³; $F_T = 4$ Н; $a_0 = 0,05$ м. Результати розрахунку записано в табл. 6.

Таблиця 6. Значення a_i при додатковій кубічній нелінійності

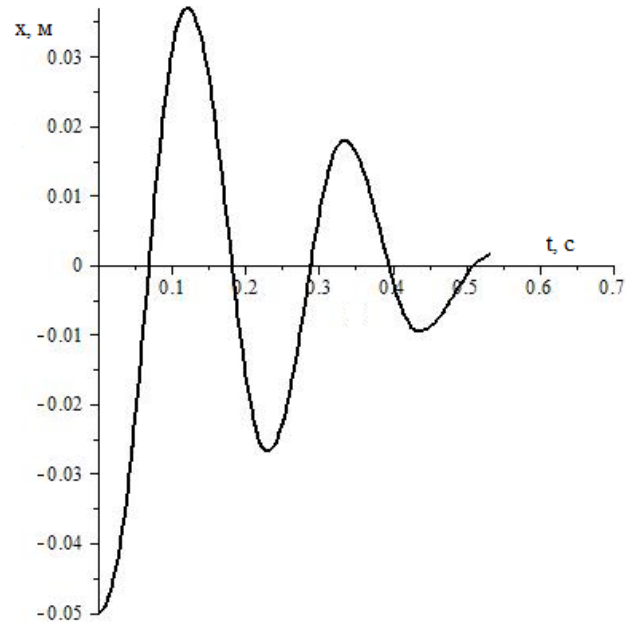
i	Значення $100a_i$, м	
	при $c_2 > 0$	при $c_2 < 0$
0	5,0000	5,0000
1	4,4474	3,6958
2	3,8532	2,6849
3	3,2141	1,7918
4	2,5287	0,9574
5	1,7990	0,1498
6	1,0320	-
7	0,2409	-

Темп спадання амплітуд розмахів при $c_2 < 0$ вищий, ніж при $c_2 > 0$. Таку закономірність мали і при $\nu = 2$. Значення a_i в табл. 6 такі, як і на рис. 6, що підтверджує вірогідність аналітичних розв'язків.

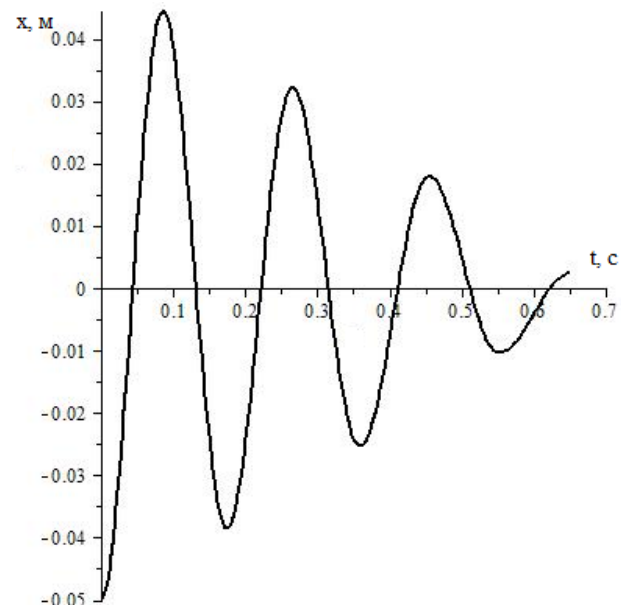
Висновки. Проведене дослідження підтвердило, що метод енергетичного балансу дає можливість точно обчислювати амплітуди вільних затухаючих коливань степенево-нелінійного осцилятора, спричинені сухим тертям Кулона, без побудови розв'язку диференціального рівняння його руху. Виявлено варіанти нелінійностей, коли розрахунок зводиться до використання явних рекурентних співвідношень, пов'язаних з розв'язками квадратного та кубічного рівнянь. У випадку довільного показника нелінійності розрахунок амплітуд доводиться проводити методом ітерацій.

Література

1. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
2. Василенко М.В. Теория колебаний і стійкості руху / М.В. Василенко, О.М. Алексейчук. – Київ.: Вища школа, 2004. – 525 с.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
4. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с.
5. Ольшанський В.П. Коливання дисипативних осциляторів. / В.П. Ольшанський, Л.М. Тіщенко, С.В. Ольшанський та ін. – Харків: Міськдрук, 2015. – 116 с.



а



б

Рис. 6. Графік коливань при додатній кубічній нелінійності, одержаний числовим комп'ютерним інтегруванням: а) – з м'якою характеристикою пружності ($c_2 < 0$); б) – з жорсткою характеристикою пружності ($c_2 > 0$)

6. Ольшанський В.П. Динаміка дисипативних осциляторів. / В.П. Ольшанський, Л.М. Тіщенко, С.В. Ольшанський. – Харків: Міськдрук, 2016. – 264 с.

7. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

8. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и мате-

математическими таблицами) / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

9. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Энде, Ф. Лёш. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

References

1. Babakov I.M. Teoriya kolebanij. (2004). Moscow: Drofa, 591.

2. Vasylenko M.V., Alekseichuk O.M. Teoriia kolyvan i stiikosti rukhu. (2004). Kyiv: Vyshcha shkola, 525.

3. Biderman V.L. Teoriya mekhanicheskikh kolebanij. (1980). Moscow: Vysshaya shkola, 408.

4. Panovko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebanij (1980). Moscow: Nauka, 270.

5. Olshanskiy V.P., Tishchenko L.M., Olshanskiy S.V. ta in. Kolyvannia dysypatyvnykh ostsyliatoriv. (2015). Kharkiv: Miskdruk, 116.

6. Olshanskiy V.P., Tishchenko L.M., Olshanskiy S.V. Dynamika dysypatyvnykh ostsyliatoriv. (2016). Kharkiv: Miskdruk, 264.

7. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh robotnikov i inzhenerov) (1974). Moscow: Nauka, 832.

8. Abramovicz M., Stigan I. Spravochnik po special'ny'm funkcziyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tabliczami) (1979). Moscow: Nauka, 832.

9. Yanke E., E'nde F., Lyosh F. Special'ny'e funkczii (1977). Moscow: Nauka, 344.

Аннотация

Свободные колебания упруго нелинейного осциллятора с сухим трением

В.П. Ольшанский, В.В. Бурлака, М.В.Слипченко

Методом энергетического баланса выведены рекуррентные соотношения для расчета последовательности ниспадающих амплитуд размахов диссипативного осциллятора с сухим трением Кулона. Рассмотрены различные варианты нелинейной упругости колебательной системы. В статье рассмотрены случаи колебаний осциллятора со следующими показателями нелинейности коэффициента упругости: нелинейно-степенного с вариантами линейного упругого осциллятора, осциллятора с мягкой характеристикой упругости при различных ее значениях, квадратичной и кубической нелинейностью; колебания осциллятора при наличии в выражении силы упругости линейной составляющей с разными показателями нелинейности. Выделены случаи, когда выведенные рекуррентные соотношения имеют замкнутые аналитические решения и построено их. Составленные рекуррентные соотношения между амплитудами размахов и предложено их числовое решение методом итераций Ньютона. Проведено сравнение численных результатов, к которым приводят такие решения и компьютерные интегрирования дифференциального уравнения движения. Показано полную согласованность результатов, полученных различными способами. Предложены компактные формулы для расчета ширины зоны застоя при различных видах нелинейности. Изложенный способ расчета прост в реализации, потому что не требует решения нелинейного дифференциального уравнения свободных колебаний осциллятора. При выводе рекуррентных соотношений задействовано точное аналитическое решение кубического уравнения, предложенное Кардано. Выявлено варианты нелинейностей, когда расчет сводится к использованию явных рекуррентных соотношений, связанных с решениями квадратного и кубического уравнений. В случае произвольного показателя нелинейности расчет амплитуд приходится проводить методом итераций. Выявлено варианты нелинейностей, когда расчет сводится к использованию явных рекуррентных соотношений, связанных с решениями квадратного и кубического уравнений. В случае произвольного показателя нелинейности расчет амплитуд приходится проводить методом итераций.

Ключевые слова: упруго нелинейный осциллятор, степенные нелинейности, трение Кулона, свободные колебания, рекуррентные соотношения, метод энергетического баланса.

Abstract

Free oscillations of an elastic nonlinear oscillator with dry friction

V.P. Olshanskiy, V.V. Burlaka, M.V. Slipchenko

Using the energy balance method, recurrence relations are derived for calculating the sequence of falling amplitudes of the ranges of a dissipative oscillator with dry Coulomb friction. Various variants of nonlinear elasticity of the oscillatory system are considered. The article discusses cases of oscillations of an oscillator with the following non-linearity coefficients of elasticity: nonlinear-power with options for a linear elastic

oscillator, an oscillator with a soft characteristic of elasticity at its various values, quadratic and cubic nonlinearity; oscillations of the oscillator in the presence in the expression of the elastic force of the linear component with different nonlinearity indices. The recurrence relations between the amplitudes of the ranges are compiled and their numerical solution is proposed by the Newton iteration method. Cases are distinguished when the derived recurrence relations have closed analytical solutions, and their graphs are constructed. A comparison is made of the numerical results that such solutions and computer integration of the differential equation of motion lead to. The full consistency of the results obtained in various ways is shown. Compact formulas are proposed for calculating the stagnation zone width for various types of nonlinearity. The described calculation method is simple to implement, because it does not require solving the nonlinear differential equation of free oscillations of the oscillator. In deriving the recurrence relations, the exact analytical solution of the cubic equation proposed by Cardano is involved. Variants of nonlinearities are revealed when the calculation reduces to using explicit recurrence relations related to the solutions of quadratic and cubic equations. In the case of an arbitrary indicator of nonlinearity, the amplitudes are calculated by the iteration method.

Keywords: *elastically nonlinear oscillator, power nonlinearities, Coulomb friction, free vibrations, recurrence relations, energy balance method.*

Бібліографічне посилання/ Bibliography citation: Harvard

Olshanskiy V., Burlaka V. and Slipchenko M. (2019). Free oscillations of an elastic nonlinear oscillator with dry friction. *Engineering of nature management*, (3(13), pp. 329 - 77.

Подано до редакції / Received: 07.11.2019