

УДК 531.01

## Законы свободного движения весомой материальной точки в спокойной изотропной газообразной среде

В.И.Мельник<sup>1</sup>, А.И.Аникеев<sup>2</sup>

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства  
 им. П. Василенка (г. Харьков, Украина), <sup>1</sup> victor\_melnik@ukr.net, <sup>2</sup> anikeev55@ukr.net

Рассматривается свободное движение объемной весомой материальной частицы в спокойном газообразном изотропной среде. Сила сопротивления среды принята пропорциональной квадрату линейной скорости. Получены уравнения длины пути частицы и затрат энергии на преодоление сил сопротивления среды. Интегральные выражения для текущих декартовых координат приведены в компактной формы в виде определенных интегралов.

**Ключевые слова:** частица, масса, объем, движение, газообразная среда, координата, сила, сопротивление, путь, энергия.

**Актуальность задачи** о свободном движении весомой объемной материальной точки в спокойной газообразной среде вытекает из широкого круга ее практических приложений. К такой задаче сводятся математические модели, описывающие движение частиц сельскохозяйственных материалов в различных сепарирующих устройствах, в устройствах для разбросного посева семян зерновых культур, внесения минеральных и органических удобрений, частично задачи почвообработки и т.д.

**Постановка проблемы.** Рассмотрим свободное движение материальной частицы  $M$ , которая имеет конечные малые размеры и массу  $m$  и перемещается в спокойной изотропной газообразной среде, характеризующейся плотностью  $\rho$ . Ограничимся случаем, когда модуль  $R_c$  силы сопротивления газообразной среды  $\vec{R}_c$ , которую испытывает частица  $M$ , пропорционален квадрату модуля  $\mathcal{V}$  ее линейной скорости  $\vec{\mathcal{V}}$ . Для этого случая известны два метода определения силы сопротивления среды  $\vec{R}_c$ . В соответствии с первым, используется коэффициент сопротивления  $\varepsilon = \varepsilon(R_c)$ , зависящий от значения числа Рейнольдса  $R_e$  [1], но не связанный с линейной скоростью  $\mathcal{V}$

$$R_c = \varepsilon \rho F \frac{\mathcal{V}^2}{2}, \quad (1)$$

где  $F$  – площадь проекции материальной частицы  $M$  на плоскость, перпендикулярную к вектору  $\vec{\mathcal{V}}$ . Во втором случае силу

$$R_c = k_n m \mathcal{V}^2 \quad (2)$$

определяют через использование коэффициента парусности  $k_n$  [2]

$$k_n = \frac{k \rho F}{mg}, \quad (3)$$

где  $k$  – коэффициент сопротивления среды [2], окружающей частицу  $M$ . В работе [3] трактовка коэффициентов  $k_n$  и  $k$ , несколько иная  $k_n = k \rho F / m$ , но в любом случае сила сопротивления среды  $R_c$  рассматривается как функция только одной переменной величины – линейной скорости  $\mathcal{V}$ . Отсюда следует, что выбор выражения для  $R_c$  – вопрос не принципиальный. В каждом случае предполагается использование экспериментально определяемых коэффициентов  $\varepsilon$  или  $k$  и  $k_n$ . Далее покажем, что на рассматриваемую задачу это обстоятельство дополнительных ограничений не накладывает и проявляется лишь в определении коэффициента пропорциональности между квадратом линейной скорости  $\mathcal{V}$  и силой  $R_c$ .

Если вектор линейной скорости  $\vec{\mathcal{V}}$  частицы  $M$  понимать как функцию времени  $t$  ( $\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}}(t)$ ), то вектор  $\vec{\omega}$  ее полного линейного ускорения можно представить в виде производной  $\vec{\omega} = \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{V}}$ . Напомним, что первая производная от модуля линейной скорости  $\mathcal{V}$  по времени  $t$  дает касательную компоненту линейного ускорения [4].

### Основные результаты.

**Силовой баланс.** Обозначив  $\vec{g}$  – вектор ускорения свободного падения и  $m\vec{g}$  – сила

веса частицы  $M$ , запишем для этой частицы уравнение ее силового баланса

$$m\vec{\omega} = m\vec{g} + \vec{R}_c, \quad (4)$$

которое путем использования замены (в зависимости от выбранного варианта формулы для силы сопротивления среды  $R_c$  (1) или (2))

$$\gamma = \frac{1}{2mg} \varepsilon \rho F \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{k_n}{g} \quad (5)$$

и, соответствующего ей (5), нового представления вектора силы сопротивления  $\vec{R}_c$

$$\vec{R}_c = -\gamma mg \vartheta \vec{g}, \quad (6)$$

приводится к виду

$$m\vec{\omega} = m\vec{g} - \gamma mg \vartheta \vec{g}. \quad (7)$$

Знак “-” в “новом” выражении для  $\vec{R}_c$  (6) указывает на противоположную ориентацию совпадающих по линии действия векторов  $\vec{R}_c$  и  $\vec{g}$ .

С учетом малости объема и сферичности формы частицы  $M$ , а также требований на отсутствие внешних возмущающих факторов и на изотропность как материала частицы так и газобразной среды, в которой частица движется в состоянии свободного полета, можно однозначно утверждать, что такое движение всегда остается плоским, а сама плоскость перемещения определяется векторами: начальной скорости  $\vec{g}_0$  и ускорения свободного падения  $\vec{g}$ .

В таком случае для описания траектории движения частицы  $M$  удобно воспользоваться декартовой системой координат  $OXY$ . Ее точка приложения совпадает с началом вектора  $\vec{g}_0$ , ось ординат ( $OY$ ) – параллельна вектору  $\vec{g}$  ускорения свободного падения, а ось абсцисс ( $OX$ ) и вектор начальной скорости  $\vec{g}_0$  – лежат в одной плоскости и ориентированы в одну сторону. Если под  $x$  и  $y$  понимать координаты (абсциссу и ординату) точки текущего положения частицы  $M$ , а в качестве параметра выбрать время  $t \in [0, \infty]$ , то уравнение траектории движения частицы  $M$  можно представить в параметрическом виде [5, 6]

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (8)$$

когда координаты  $x$  и  $y$  рассматриваются как функции времени  $t$ .

Рассмотрим другую подвижную систему координат, базисный репер которой  $(0, \vec{\tau}, \vec{n})$  совмещен с центром тяжести частицы  $M$  и перемещается относительно исходной системы координат  $OXY$  вместе с частицей  $M$ , а орты  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$  соответственно совпадают с касательной и нормалью к траектории полета частицы  $M$  в

точке ее текущего положения, причем  $\vec{\tau} = \vec{g} / \vartheta$ , т.е. ориентирован в сторону положительного направления  $\vec{g}$ , а  $\vec{n}$  – к центру кривизны траектории полета частицы  $M$  (параметрической кривой (8)). Теперь представим векторы  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{g}$  и  $\vec{g}$  из уравнения силового баланса (7) в виде разложения на орты  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \left( \vec{\tau} \frac{d\vartheta}{dt}, \vec{n} \frac{\vartheta^2}{r} \right), \\ \vec{g} &= (-\vec{\tau} g \sin \beta, \vec{n} g \cos \beta), \\ \vec{g} &= (\vec{\tau} \vartheta, \vec{n} 0), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\frac{d\vartheta}{dt}$  и  $\vartheta^2 / r$  – касательная и нормальная компоненты линейного ускорения частицы  $M$ ;  $r$  – радиус кривизны ее траектории полета (положительная величина), а

$$\beta = \beta(t) = \arctan \left( \frac{\frac{d}{dt} y(t) dt}{\frac{d}{dt} x(t) dt} \right) = \arctan \left( \frac{dy}{dx} \right) \quad (10)$$

– угол между касательной к траектории и осью абсцисс ( $OX$ ) в точке текущего положения частицы  $M$ . Исходя из физической сути рассматриваемой задачи и оговоренной привязки системы координат  $OXY$  к вектору  $\vec{g}$ , заключаем, что угол  $\beta$  с течением времени  $t \in [t_0, \infty]$  монотонно убывает ( $\beta_0 \geq \beta(t) \geq -\frac{1}{2}\pi$ ). Тут  $t_0$  – время на момент начала движения, а  $\beta_0 = \beta(t_0)$ . Интервал возможных значений  $\beta_0$  следующий –  $\beta_0 \in [+\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ . Поскольку  $\beta$  – угол между осью абсцисс  $OX$  и вектором линейной скорости  $\vec{g}$ , то  $\beta_0$  – это угол между осью  $OX$  и  $\vec{g}_0 = \vec{g}(t_0)$ .

С учетом разложения векторов  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{g}$  и  $\vec{g}$  на компоненты (9), уравнение силового баланса (7) дает систему скалярных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta}{dt} = -g \sin \beta - \gamma g \vartheta^2, \\ \vartheta^2 = rg \cos \beta. \end{cases} \quad (11)$$

последняя содержит три неизвестные функции от параметра  $t$  (от времени):  $\vartheta = \vartheta(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$ ,  $r = r(t)$  и не является определенной. Добиться ее определенности можно, применив развернутое представление радиуса кривизны траектории  $r$

$$r = -\frac{dS}{d\beta} = -\frac{\vartheta dt}{d\beta}, \quad (12)$$

где  $S$  – длина дуги траектории от начала до текущей точки. Тут предполагается, что  $S = S(t)$  и  $\vartheta = \vartheta(t)$  рассматриваются как сложные функции  $S = S(\beta(t))$  и  $\vartheta = \vartheta(\beta(t))$ , в которых

связь со временем  $t$  опосредствована через угол  $\beta = \beta(t)$ . Знак "минус" обусловлен тем, что в рассматриваемой задаче радиус – величина положительная, а знаки  $d\beta$  и  $dt$  в пределах оговоренных выше физически осмысленных интервалов всегда разные. Этим из равенства (12) корректно исключается знак модуля. Подстановка  $r$  (12) во второе уравнение системы (11) дает

$$dt = -\frac{g d\beta}{g \cos \beta}. \quad (13)$$

Теперь, выполнив подстановку дифференциала  $dt$  (13) в первое уравнение системы (11), приходим к дифференциальному уравнению Бернулли [5]

$$\frac{d\mathcal{G}}{d\beta} - \mathcal{G} \tan \beta = \frac{\gamma}{\cos \beta} \mathcal{G}^3. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) дает выражение для скорости  $\mathcal{G}(\beta)$  как функции угла  $\beta$

$$\mathcal{G}(\beta) = \left\{ -2\gamma \cos^2 \beta \left[ \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) - C_g \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

тут  $C_g$  – постоянная интегрирования, которую находим из этого же уравнения (15), имея в виду начальные значения  $\beta_0 = \beta(t_0)$ ,  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}(t_0)$

$$C_g = \frac{1}{2\gamma \cos^2 \beta_0 \mathcal{G}_0^2} + \frac{\sin \beta_0}{2 \cos^2 \beta_0} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta_0}{1 - \sin \beta_0} \right). \quad (16)$$

Из анализа выражения для линейной скорости (15) видно (рис. 1), что функция  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\beta)$  в случае большого значения начальной скорости  $\mathcal{G}_0$  в физически осмысленном интервале изменения угла  $\beta \in [-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi]$  может иметь только ниспадающую ветвь (участок замедления). В случае малого значения начальной скорости  $\mathcal{G}_0$  и положительного начального угла  $\beta_0 > 0$ , наблюдается два участка: первый – замедление (подъем), второй – разгон, до определенного предельного значения  $\mathcal{G}_{кр}$  – именуемого критической скоростью [2, 3]. Если же  $\beta_0 < 0$ , то кривая  $\mathcal{G}(\beta)$  очевидно будет иметь опять только один участок, но или разгонный (при малом  $\mathcal{G}_0 < \mathcal{G}_{кр}$ ), или участок замедления (при  $\mathcal{G}_0 > \mathcal{G}_{кр}$ ). Изучим это обстоятельство, для чего возвратимся к определению силы сопротивления среды  $R_c$ . В случае если  $R_c$  (2) выражается через коэффициент парусности

$k_n$ , то автоматически подразумевается существование критической скорости [2, 3]

$$\mathcal{G}_{кр}^2 = \frac{g}{k_n}, \quad (17)$$

а значит должен существовать предел  $\lim_{\beta \rightarrow -\frac{1}{2}\pi} \mathcal{G}(\beta) = \mathcal{G}_{кр}$ . Раскрыв скобки в (15) и памятуя

о том, что  $\lim_{\beta \rightarrow -\frac{1}{2}\pi} \cos^2(\beta) = 0$ , получаем

$$\lim_{\beta \rightarrow -\frac{1}{2}\pi} \mathcal{G}(\beta) = \gamma^{-\frac{1}{2}}. \text{ Подстановка сюда } \gamma \text{ из замены}$$

(5) дает (17). Так подтверждается правильность предложенных выше выкладок.

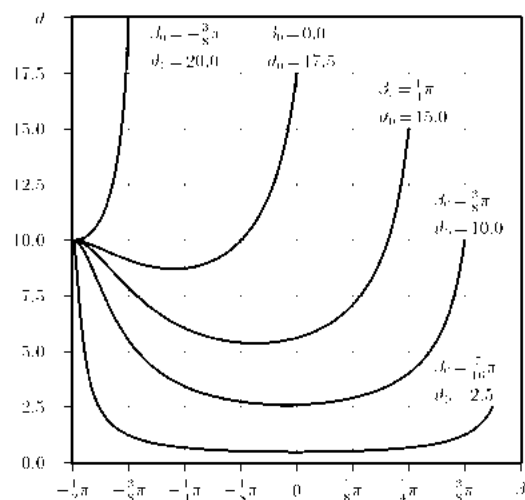


Рис. 1. Связь модуля линейной скорости  $\mathcal{G}$  частицы  $M$  с величиной угла  $\beta$  для различных начальных условий.

Функциональную связь  $t = t(\beta)$  (времени с углом) (13) иллюстрирует рис. 2. Чем больше способность среды оказывать сопротивление движению частицы  $M$  (чем больше  $\gamma$ ), тем быстрее  $\beta$  стремится к своему пределу  $-\pi/2$  ( $\beta \rightarrow -\pi/2$ ) или, что то же самое, тем быстрее искривляется траектория.

Понимая декартовы координаты (8) как сложные функции, у которых связь с параметром  $t$  опосредствована через угол  $\beta(t)$ , т.е. что

$$y = y(\beta(t)), \quad x = x(\beta(t)), \quad (18)$$

исключив из (18) параметр (время)  $t$ , гипотетически можно получить непосредственную связь типа  $y = y(\beta)$  и  $x = x(\beta)$ . Выполним эту задачу. Исходя из физической сути, запишем

$$dy = \mathcal{G} \sin \beta dt, \quad dx = \mathcal{G} \cos \beta dt. \quad (19)$$

Теперь, выполнив подстановку дифференциала  $dt$  из (13), получим

$$y = -\frac{1}{g} \int \vartheta^2 \operatorname{tg} \beta d\beta, \quad x = -\frac{1}{g} \int \vartheta^2 d\beta. \quad (20)$$

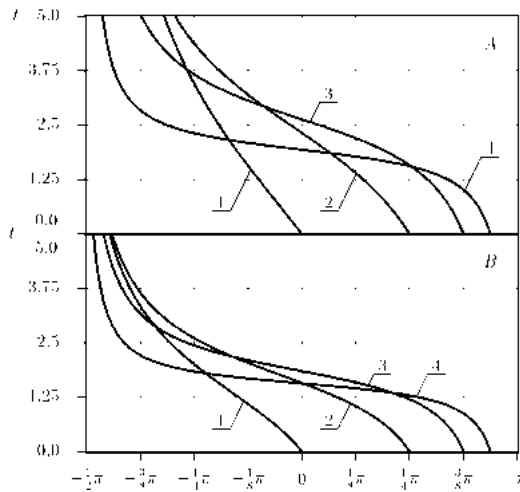


Рис. 2. Продолжительность движения  $t = t(\beta)$ .  
Графикам А и В соответствуют два значения коэффициента  $\gamma$  (0,001 и 0,01), а кривым 1, 2, 3 и 4 – разные значения начального угла  $\beta_0$  ( $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{7}{16}\pi$ ) и начальной скорости  $\vartheta_0$  (20, 17,5, 15, 10).

Рассмотрим первый интеграл (для  $y(\beta)$ ) из выражений (20). Выполнив подстановку в него развернутого выражения скорости  $\vartheta(\beta)$  из (15), имеем

$$y = \frac{1}{2\gamma g} \int \left[ \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) - C_g \right]^{-1} \frac{\sin \beta}{\cos^3 \beta} d\beta. \quad (21)$$

Применим замену переменных

$$u = \ln \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right). \quad (22)$$

Из (22) следует:

$$\begin{aligned} du &= \frac{2}{\cos \beta} d\beta; \quad \sin \beta = \frac{e^u - 1}{e^u + 1}; \\ \cos^2 \beta &= 1 - \left( \frac{e^u - 1}{e^u + 1} \right)^2; \quad \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{1}{2} \operatorname{sh}(u). \end{aligned} \quad (23)$$

С применением выражений (22), (23) интеграл (21) записывается так

$$y = \frac{1}{2\gamma g} \int \frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{sh}(u) + u - 4C_g} du. \quad (24)$$

Рассмотрим второй из интегралов (20) (для  $x(\beta)$ ). Подставляя в него выражение скорости  $\vartheta(\beta)$  из (15), имеем

$$x = \frac{1}{2\gamma g} \int \left[ \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) - C_g \right]^{-1} \frac{1}{\cos^3 \beta} d\beta. \quad (25)$$

Теперь, используя уже известную замену переменных (22), (23), получим окончательное интегральное выражение для  $x(u(\beta))$

$$x = \frac{1}{\gamma g} \int \frac{\operatorname{ch}(\frac{1}{2}u)}{\operatorname{sh}(u) + u - 4C_g} du. \quad (26)$$

Длину пути  $S = S(\beta)$ , пройденного частицей М от начала движения до точки ее текущего положения, можно найти, воспользовавшись вторым уравнением системы (11) и уравнением для определения радиуса  $r$  кривизны траектории (12)

$$S = -\frac{1}{g} \int \frac{\vartheta^2}{\cos \beta} d\beta. \quad (27)$$

После подстановки в (27)  $\vartheta$  из (15)

$$S = \frac{1}{2\gamma g} \int \left[ \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) - C_g \right]^{-1} \frac{1}{\cos^3 \beta} d\beta, \quad (28)$$

и использования замены

$$v = \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) - C_g, \quad (29)$$

$$dv = \frac{1}{\cos^3 \beta} d\beta,$$

получаем интеграл вида

$$S = \frac{1}{2\gamma g} \int \frac{1}{v} dv. \quad (30)$$

Его интегрирование и затем подстановка  $v$  в соответствии с (29) дает

$$S = \frac{1}{2\gamma g} \ln \left| \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) - C_g \right| - C_s, \quad (31)$$

где постоянная интегрирования  $C_s$  определяется исходя из  $S(\beta(t_0)) = S(\beta_0) = 0$

$$C_s = \frac{1}{2\gamma g} \ln \left| \frac{\sin \beta_0}{2 \cos^2 \beta_0} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta_0}{1 - \sin \beta_0} \right) - C_g \right|. \quad (32)$$

Опираясь на известный опыт [7, 8], со значительной вероятностью можно утверждать, что для неопределенных интегралов (24) и (26) путем конечного числа преобразований подынтегральной функции получить аналитические выражения первообразных невозможно. Поэтому взамен (24) и (26) для практических целей следует рекомендовать определенные интегралы как функции верхнего предела [6]

$$y = -\frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} g^2 \tan \beta d\beta, \quad x = -\frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} g^2 d\beta, \quad (33)$$

или

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2\gamma\beta} \int_{u(\beta_0)}^{u(\beta)} \frac{\text{sh}(u)}{\text{sh}(u) + u - 4C_g} du, \\ x &= \frac{1}{\gamma\beta} \int_{u(\beta_0)}^{u(\beta)} \frac{\text{ch}(\frac{1}{2}u)}{\text{sh}(u) + u - 4C_g} du. \end{aligned} \quad (34)$$

Результаты численного интегрирования выражений (34) методом парабол Симпсона [9], а также расчетов длины пути  $S$  по (31) представлены на рис. 3.

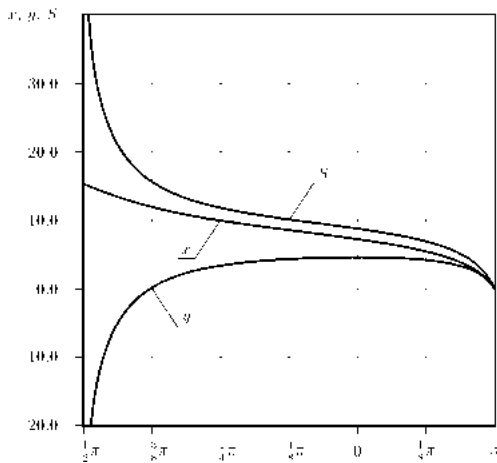


Рис. 3. Связь координат  $x$ ,  $y$  и длины дуги (пути)  $S$ , пройденной частицей  $M$  с величиной угла  $\beta$  между касательной к траектории полета и осью абсцисс.

Расчеты тут также проводились только для физически осмысленного интервала изменения угла  $\beta_0 \geq \beta \geq -\frac{1}{2}\pi$  при  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}\pi[$ . Значение высоты (ординаты  $y$ ) текущего положения частицы  $M$  в процессе ее движения сначала достигает своего максимального значения  $y_{\max} = y|_{\beta=0}$ , а затем монотонно убывает до  $-\infty$ . Горизонтальное удаление (абсцисса  $x$ ) частицы  $M$  от начальной точки в пределах всего обозначенного интервала изменения угла  $\beta$  монотонно возрастает до предельного значения  $x_{\text{кр}} = x|_{\beta=-\frac{1}{2}\pi}$ . Принятый тут индекс соответствует критической скорости  $g_{\text{кр}}$ , поскольку и  $x_{\text{кр}}$  и  $g_{\text{кр}}$  наступает одновременно (при  $\beta \rightarrow -\frac{1}{2}\pi$ ). Функция  $S(\beta)$  (путь) монотонно возрастает во всем интервале вплоть до бесконечности  $\lim_{\beta \rightarrow -\frac{1}{2}\pi} S(\beta) = +\infty$ .

Интегралы (34) можно рассматривать как параметрическое уравнение траектории полета

частицы (в качестве параметра выступает функция  $u(\beta)$  (22)) и, выполнив численное интегрирование [9], построить их графики (рис. 4).

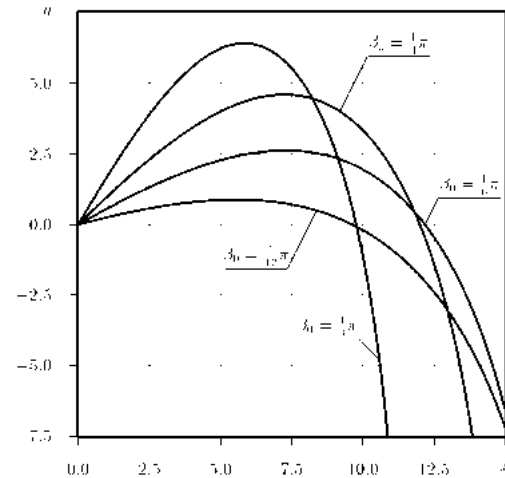


Рис. 4. Траектория полета частицы для различных значений угла  $\beta_0$ .

Наибольший интерес представляют расчеты максимальной дальности  $x_{\max}$  полета частицы и максимальной высоты  $y_{\max}$  ее подъема (рис. 5). Тут под максимальной дальностью  $x_{\max}$  условимся понимать расстояние от начальной точки до точки на траектории полета частицы  $M$ , расположенной на высоте начала движения  $y_0$  ( $x_{\max} = x|_{y(\beta \neq \beta_0) = y_0}$ ). На рис. 5 в качестве аргумента рассматривается начальный угол  $\beta_0$ . Естественно, наибольшая высота подъема достигается в случае изначально вертикального движения. Экстремум функциональной связи  $x_{\max}(\beta_0)$  лежит в интервале  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{4}\pi[$ . Причем смещается влево ( $\beta_0 \rightarrow 0$ ) пропорционально росту коэффициента  $\gamma$  из выражения силы сопротивления  $R_c$  (5), т.е. сопротивляемости среды. Увеличение  $\gamma$  приводит также к снижению максимальной высоты подъема  $y_{\max}$  и максимальной дальности полета  $x_{\max}$  частицы.

**Энергетический баланс.** Кинетическая энергия  $E_k$  частицы  $M$  в момент отрыва равна  $m g_0^2 / 2$ . В процессе свободного полета эта энергия расходуется, во-первых, на изменение потенциальной энергии  $E_p = mgy$  (в начале движения  $y = y_0 = 0$ ) и, во-вторых, на преодоление сил сопротивления газообразной среды

$$A_c = \int R_c dS. \quad (35)$$



Текущий остаток кинетической энергии  $E_k = m\mathcal{G}^2/2$ . С учетом сказанного, энергетический баланс частицы  $M$  можно записать так:

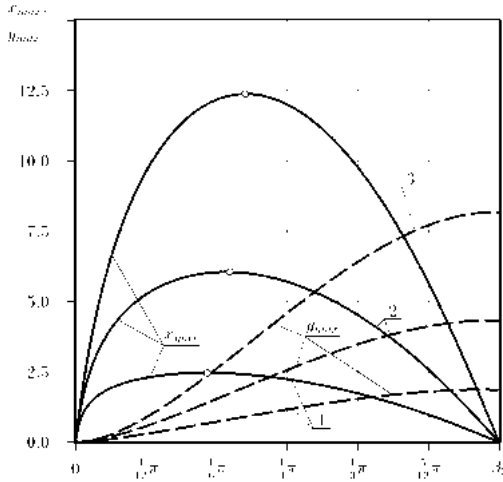


Рис. 5. Связь максимальной высоты подъема  $y_{\max}$  и дальности пролета  $x_{\max}$  частицы  $M$  с величиной угла  $\beta_0$ . Знаком “ $\circ$ ” отмечены экстремумы  $x_{\max} = x_{\max}(\beta_0)$ . Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $\gamma$  – 0.1, 0.03 и 0.01.

$$\frac{m\mathcal{G}_0^2}{2} = mgy + A_c + \frac{m\mathcal{G}^2}{2}. \quad (36)$$

Запишем интеграл  $A_c$  (35) в развернутом виде, используя  $R_c$  (1),  $\gamma$  (5) и дифференциал  $dS$  в соответствии с функцией (27)

$$A_c = -\gamma m \int \frac{\mathcal{G}^4}{\cos \beta} d\beta. \quad (37)$$

После подстановки в (37)  $\mathcal{G}$  из (15) имеем

$$A_c = -\frac{m}{4\gamma} \int \left[ \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) - C_g \right]^2 \frac{1}{\cos^5 \beta} d\beta. \quad (38)$$

Теперь, применив замену (22), (23), получаем

$$A_c = -\frac{m}{2\gamma} \int \frac{(\operatorname{ch}(u)+1)^2}{(\operatorname{sh}(u)+u-4C_g)^2} du. \quad (39)$$

Умножив интегральное выражение  $A_c$  (39) на  $2\gamma/m$ , а выражение для  $y$  (24) – на  $2\gamma g$ , и, затем, сложив результаты имеем

$$2\gamma gy + \frac{2\gamma A_c}{m} = \int \frac{\operatorname{sh}(u)(\operatorname{sh}(u)+u-4C_g) - (\operatorname{ch}(u)+1)^2}{(\operatorname{sh}(u)+u-4C_g)^2} du. \quad (40)$$

Под знаком интеграла (40) производная от дроби,

поэтому записываем

$$2\gamma gy + \frac{2\gamma A_c}{m} = \frac{\operatorname{ch}(u)+1}{\operatorname{sh}(u)+u-4C_g} + C_a, \quad (41)$$

где

$$C_a = \frac{\operatorname{ch}(u_0)+1}{4C_g - \operatorname{sh}(u_0) - u_0}, \quad (42)$$

– постоянная интегрирования. Тут принято, что  $u_0 = u(\beta_0)$  в соответствии с (22). Решаем уравнение (41) относительно  $A_c$  работы силы сопротивления среды

$$A_c = \frac{m}{2\gamma} \left[ \frac{\operatorname{ch}(u)+1}{\operatorname{sh}(u)+u-4C_g} - 2\gamma gy + C_a \right], \quad (43)$$

и получаем выражение для оценки энергетических потерь летящей частицы  $M$ , обусловленных сопротивлением окружающей среды.

Энергетический баланс частицы  $M$  (36) иллюстрирует рис. 6.

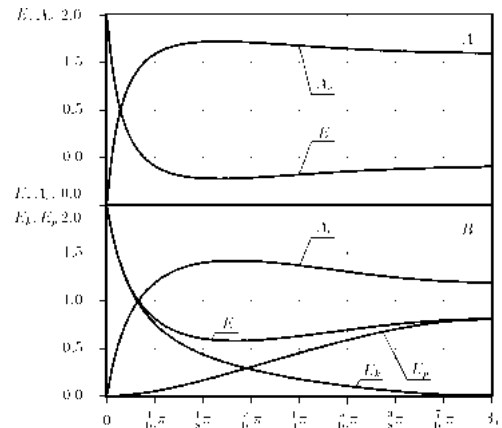


Рис. 6. Энергетический баланс летящей частицы  $M$ , как функция начального угла  $\beta_0$ : А – в момент пересечения уровня начальной высоты ( $y = y_0 = 0$ ); В – в момент максимального подъема ( $\beta = 0$ ).

На нем представлены два момента движения частицы: первый (рис. 6А) – соответствует достижению частицей высоты начала движения  $y = y_0 = 0$ ; а второй (рис. 6В) – максимальной высоты подъема  $y = y_{\max}$ . В качестве переменного аргумента взят угол  $\beta_0 \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ . В первом случае (рис. 6А) потенциальная энергия  $E_p$  равна нулю, а графики полной  $E$  и кинетической  $E_k$  энергий совпадают. Во втором случае (рис. 6В) на высоте максимального подъема  $y = y_{\max}$  потенциальная энергия  $E_p$  достигает своего максимума, а кинетическая  $E_k$  – минимума. Если движение изначально вертикальное

( $\beta_0 = \frac{1}{2}\pi$ ), то кинетическая  $E_k$  энергия полностью переходит в потенциальную  $E_p$ . В ином случае всегда присутствуют оба вида энергий.

**Выводы.** В настоящей работе для случая, когда сила сопротивления среды пропорциональна квадрату линейной скорости, впервые получены интеграл (31) длины пути  $S(\beta)$ , пройденного частицей от начала движения до текущей точки, и уравнение (43) работы  $A_c$  сил сопротивления  $R_c$ . Определенные интегралы (33) текущих координат  $x(\beta)$ ,  $y(\beta)$  путем предложенной замены независимой переменной (22) приведены к компактной форме (34)

### Литература

1. Смайлов. С.А. Механика жидкости и газа / С.А. Смайлов, К.А. Кувшинов // Томский политехнический университет. – Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2012. – 121 с.
2. Воронов, И.Г. Очистка и сортирование семян / И.Г. Воронов, И.Е. Кожуховский, П.П. Колышев, Г.Т. Павловский – М.: Гос. изд. с.-х. литературы, 1959. – 581 с.

### Анотація

## Законои вільного руху ваговою матеріальної точки в спокійній ізотропній газоподібному середовищі

В.І. Мельник, О.І. Анікеєв

*Розглядається вільний рух матеріальної частки, що має власну вагу і займає об'єм, в спокійному газоподібному ізотропному середовищі. Сила опору середовища прийнята пропорційною квадратів лінійної швидкості. Одержано рівняння довжини шляху частки та затрат енергії на подолання сил опору середовища. Інтегральні вирази для поточних декартових координат приведені до компактного форми у вигляді визначених інтегралів.*

**Ключові слова:** частинка, маса, об'єм, рух, газоподібне середовище, координата, сила, опір, шлях, енергія.

### Abstract

## The laws of the free movement of ponderable material point in a relaxed isotropic gaseous medium

V.I.Melnik, A.I.Anikeev

*We consider the free movement of bulk density of the material particles in a gaseous Mr. Spock isotropic medium. The strength of the resistance of the medium adopted proportional to the square of the linear velocity. Equations are obtained path length of the particle and energy consumption for pre-overcoming resistance force protection. Integral expressions for the current Cartesian coordinate-tension shown in compact form as definite integrals*

**Keywords:** particle mass, volume, movement, gaseous medium, coordinate, power, resistance, the path of energy.

Представлено: М.А. Цыганенко / Presented by: M.A. Tsyganenko

Рецензент: Н.В. Бакум / Reviewer: N.V. Bakum

Подано до редакції / Received: 2.12.2014