УДК 531.534

О параметрическом резонансе в осцилляторе линейно-переменной массы

В.П.Ольшанский, С.В.Ольшанский

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П.Василенка (Харьков, Украина),

Методом ВБК построено приближённое решение задачи о нестационарных колебаниях при переходе через резонанс осциллятора линейно-переменной массы при действии возмущающей силы постоянной частоты и амплитуды. Исследованы особенности нестационарного резонанса при увеличении и уменьшении массы осциллятора.

Ключевые слова: *ВБК – метод, осциллятор переменной массы, резонанс.*

Введение. Механизмы с переменной массой звеньев часто используют в сельскохозяйственном производстве и исследование их динамических свойств относится к актуальным научным задачам.

Одним из первых, кто отмечал актуальность этой тематики, был родоначальник отечественной земледельческой механики академик В.П. Горячкин. Вот, что писал по этому поводу его ученик академик И.И. Артоболевский в предисловии к монографии [1]: “Вопрос о динамическом исследовании механизмов с учётом переменности масс звеньев и обрабатываемого продукта возникал ещё в 20-х годах прошлого столетия, когда выдающийся русский учёный академик В.П. Горячкин, развивая вопросы теории сельскохозяйственных машин, рассматривал взаимодействие исполнительного органа – орудия и обрабатываемого объекта – среды. Уже тогда В.П. Горячкин формулировал механику рабочих сред, как механику тел и сред переменной массы…” Получение аналитических решений в этой области механики и машиноведения затруднено тем, что задачи динамики сводятся к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. В отдельных случаях их аналитические решения удаётся выразить в известных специальных функциях [2,3,4]. Но несмотря на значительный прогресс в механике тел и систем с переменной массой, остаются мало исследованными нестационарные вынужденные колебания, описываемые неоднородными дифференциальными уравнениями с переменными непериодическими коэффициентами. Характерно, что вследствие изменения массы или жёсткости упругой системы во времени, в ней возможно возникновение нестационарного резонанса даже при действии внешней силы постоянной частоты и амплитуды. В случае, когда эти резонансные колебания происходят при медленном изменении массы, процесс движения с хорошим приближением можно описать с помощью метода ВБК [5], что существенно упрощает инженерные расчёты.

Поэтому целью данной работы является апробация метода ВБК для расчёта нестационарных резонансных колебаний осциллятора линейно-переменной массы при действии возмущающей силы постоянной частоты и амплитуды.

Основная часть работы. Перемещение осциллятора $x(t)$ описываем дифференциальным уравнением

$$m_0(1+\gamma t)\frac{d^2x}{dt^2}+cx=F\sin(\omega t) \qquad (1)$$

в котором m_0 – начальная масса колеблющейся материальной точки; $m_0\gamma$ – скорость изменения массы во времени t c – коэффициент жёсткости пружины; F,ω – амплитуда и частота возмущающей силы.

Уравнение (1) решаем при нулевых начальных условиях.

Введением новой переменной $\xi=(1+\gamma t)$, уравнение (1) преобразуем к форме:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2}+\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\cdot\frac{x}{\xi}=f(\xi), \qquad (2)$$

где $f(\xi)=\dfrac{F}{m_0\gamma^2\xi}\sin\left[\dfrac{\omega}{\gamma}(\xi-1)\right]$, $\omega_0=\sqrt{c/m_0}$ – начальное значение частоты свободных колебаний осциллятора.

Начальными условиями к (2) принимаем:

$$x\big|_{\xi=1}=0\,;\ \frac{dx}{d\xi}\Big|_{\xi=1}=0 \qquad (3)$$

При $F=0$ уравнение (2) становится однородным:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2}+\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}\cdot\frac{x}{\xi}=0 \qquad (4)$$

и описывает свободные колебания.

Далее вводим ограничение $\omega_0/\gamma>>1$. При наличии большого безразмерного параметра общее решение уравнения (4) удобно построить методом ВБК [5]. Указанный метод, после отбрасывания слагаемых высшего порядка малости, приводит к фундаментальным решениям:

$$x_1(\eta)=\sqrt{\eta}\cos(\eta);$$

$$x_2(\eta)=\sqrt{\eta}\sin(\eta) \qquad (5)$$

где $\eta=\eta_0\sqrt{\xi}$; $\eta_0=\frac{2}{|\gamma|}\omega_0$

Используя (5), составим из них определитель Вронского. Поскольку:

$$\frac{dx_1}{d\xi}=\frac{\eta_0^2}{2\eta}\left(\frac{\cos\eta}{2\sqrt{\eta}}-\sqrt{\eta}\sin\eta\right);$$

$$\frac{dx_2}{d\xi}=\frac{\eta_0^2}{2\eta}\left(\frac{\sin\eta}{2\sqrt{\eta}}+\sqrt{\eta}\cos\eta\right)$$

то

$$\Delta(\eta)=x_1\frac{dx_2}{d\xi}-x_2\frac{dx_1}{d\xi}=\frac{\eta_0^2}{2}=const. \qquad (6)$$

Решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде:

$$x=c_1(\eta)\sqrt{\eta}\cos\eta+c_2(\eta)\sqrt{\eta}\sin\eta. \qquad (7)$$

Согласно методу Лагранжа, функции $c_1(\eta)$ и $c_2(\eta)$, при начальных условиях (3), представляются интегралами:

$$c_1=-\frac{2}{\eta_0^2}\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{\eta f(\eta)\cdot x_2(\eta)}{\Delta(\eta)}d\eta;$$

$$c_2=\frac{2}{\eta_0^2}\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{\eta f(\eta)\cdot x_1(\eta)}{\Delta(\eta)}d\eta \qquad (8)$$

где $f(\eta)=\frac{F\eta_0^2}{m_0\gamma^2\eta^2}\sin\left[\frac{\omega}{\gamma}\left(\frac{\eta^2}{n_0^2}-1\right)\right]$

Используя (5), (6), вместо (8), получаем:

$$c_1=-\frac{F\eta_0}{c}a_1(\eta);\ c_2=\frac{F\eta_0}{c}a_2(\eta) \qquad (9)$$

где

$$a_1(\eta)=\int_1^{\eta/\eta_0}\frac{\sin(\eta_0 y)}{\sqrt{\eta_0 y}}\sin\left[\frac{\omega}{\gamma}\left(y^2-1\right)\right]dy \qquad (10)$$

$$a_2(\eta)=\int_1^{\eta/\eta_0}\frac{\cos(\eta_0 y)}{\sqrt{\eta_0 y}}\sin\left[\frac{\omega}{\gamma}\left(y^2-1\right)\right]dy$$

Коэффициент динамичности перемещений осциллятора K_∂ определяем выражением:

$$K_\partial(\eta)=\frac{c}{F}\cdot\left[\max x(\eta)\right]$$

Учитывая (7), (9), (10), приходим к следующей формуле коэффициента динамичности:

$$K_\partial(\eta)=\eta_0\sqrt{\eta}\sqrt{\left[a_1(\eta)\right]^2+\left[a_2(\eta)\right]^2} \qquad (11)$$

Интегралы (10) не выражаются через элементарные или затабулированные специиальные функции, поэтому их приходится вычислять на компьютере.

Подчеркнём, что расчёт K_∂ по формуле (11) приводит к завышенным значениям этого коэффициента [6], [7], поскольку задачу нестационарных колебаний решили без учёта вязкости среды и рассеивания энергии в деформируемой пружине. По сути, (11) является верхней оценкой коэффициента динамичности. Но при быстром переходе через резонанс завышение коэффициента динамичности незначительно [6], [7].

Численные результаты и их анализ. Рассмотрим модельную задачу, когда масса осциллятора возрастает. Для этого примем следующие исходные данные: $m_0=2кг$; $c=5000Н/м$; $\omega/\omega_0=0{,}5$; и разные значения γ. На рис.1 нанесены коэффициенты динамичности, отмеченные цифрами 1,2,3, которые соответствуют значениям $\gamma=0{,}2;0{,}4;0{,}8c^{-1}$.

При вышеуказанных исходных данных частота внешней силы ω совпадает со значением мгновенной частоты свободных колебаний осциллятора, для значения $\eta/\eta_0=2$. Однако, максимальный K_∂ достигается не при $\eta/\eta_0=2$, а при больших соотношениях η/η_0, т.е. происходит смещение положения резонанса вправо. Величина смещения увеличивается с возрастанием γ и это сопровождается уменьшением максимального K_∂, поскольку убыстряется прохождение области резонанса. После перехода через резонанс начинаются биения.

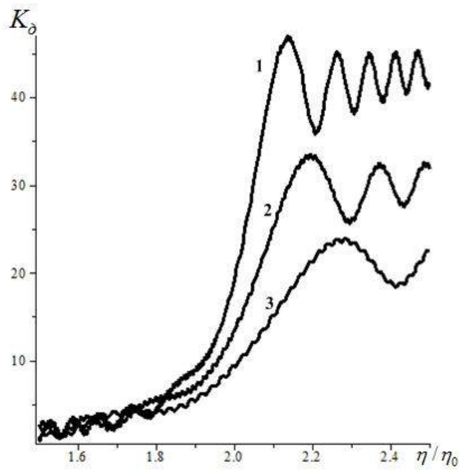

Рис. 1. Зависимость коэффициента динамичности $K_д$ от безразмерного параметра η/η_0 при возрастании массы

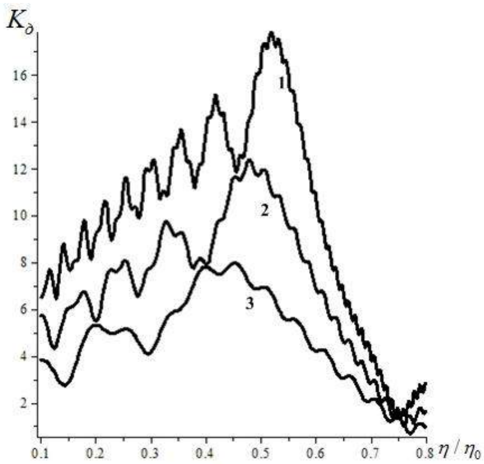

Рис. 2. Зависимость коэффициента динамичности $K_д$ от безразмерного параметра η/η_0 при убывании массы

Коэффициенты динамичности осциллятора убывающей массы представлены на рис. 2. Они получены при следующих исходных данных: $m_0 = 2кг$; $c = 1250 Н/м$; $\omega/\omega_0 = 1{,}6$ и разных значениях γ. Цифрами 1,2,3 на рис. 2 отмечены графики $K_д$, что соответствуют значениям $\gamma = -0{,}2; -0{,}4; -0{,}8 c^{-1}$. Теперь равенство частот возмущающей силы и свободных колебаний осциллятора наступает при $\eta/\eta_0 = 0{,}625$. Но на рис. 2 положение максимальных $K_д$ (резонанса) смещено влево в сторону меньших отношений, чем $0{,}625$. С увеличением $|\gamma|$ (скорости прохождения резонанса) уменьшаются резонансные η/η_0 и $K_д$

Выводы. Вследствие изменения массы осциллятора, он может попадать в область резонансных колебаний и при постоянной частоте возмущающей силы.

Использование метода ВБК при высокочастотном колебательном процессе сводит расчёт к интегралам от тригонометрических функций, которые приходится вычислять на компьютере. Прохождение через резонанс в осцилляторе возрастающей массы аналогично нестационарному резонансу в осцилляторе постоянных параметров под действием силы возрастающей частоты, а в осцилляторе убывающей массы – аналогично резонансу, вызванному действием силы убывающей частоты.

Литература

1. Бессонов, А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. / А.П. Бессонов – М.: Наука, 1967. – 267 с.

2. Cveticanin, L. Dynamics of Machines with Variable Mass. / L.Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, 1998. – 300 p.

3. Светлицкий, В.А. Сборник задач по теории колебаний / В.А.Светлицкий, И.В.Стасенко – М.: Высшая школа, 1973. – 456 с.

4. Ольшанський, В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси / В.П.Ольшанський, С.В.Ольшанський // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. – Вінниця. Вип.2(70). – 2013. – С. 57-59.

5. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. / Э.Камке – М. : Наука, 1976. – 576 с.

6. Филиппов, А.П. Колебания деформируемых систем / А.П.Филиппов – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.

7. Голоскоков, Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г. Голоскоков, А.П.Филиппов. – К.: Наукова думка, 1977. – 340 с.

Анотація

Про параметричний резонанс в осциляторі лінійно-змінної маси

В.П.Ольшанский , С.В.Ольшанский

Методом ВБК побудовано наближений розв'язок задачі про нестаціонарні коливання при переході через резонанс осцилятора лінійно-змінної маси при дії збурюючої сили сталої частоти і амплітуди. Досліджено особливості нестаціонарного резонансу при збільшенні та зменшенні маси осцилятора.

***Ключевые слова**: ВБК – метод, осциллятор змінної маси, резонанс*

Abstract

On the parametric resonance in a linear oscillator with variable mass

V.Olshansky, S.Olshansky

Using VBK method an approximate solution of the problem of time-dependent vibrations when passing through the resonance of linear oscillator with variable mass under the action of perturbing force of constant frequency and amplitude has been constructed. The features of non-stationary resonance with increasing and decreasing mass of oscillator have been investigated.

***Key words**: VBK-method, oscillator with variable mass, resonance*

Представлено: В.И.Пастухов / Presented by: V.Pastuhov
Рецензент: А.С.Полянский / Reviewer: A.Polyanskiy
Подано до редакції / Received: 11.06.2013