

УДК 629.017

## Математичне моделювання руху шарнірно-зчленованої колісної машини без пружного елемента у з'єднувальному шарнірі

Є.О. Дубінін<sup>1</sup>, О.С. Полянський<sup>2</sup>, Д.М. Клец<sup>3</sup>, В.В. Задорожня<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> Харківський національний автомобільно-дорожній університет  
(м. Харків, Україна) <sup>1</sup>dubinin-rmn@ukr.net

<sup>4</sup> Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка (м. Харків, Україна) zadorvika@ukr.net

В результаті проведених теоретичних досліджень отримано математичну модель руху секцій шарнірно-зчленованої колісної машини нерівностями. При складанні динамічної моделі руху шарнірно-зчленованого колісного трактора нерівностями були враховані основні конструктивні параметри, що впливають на стійкість його положення в площині, перпендикулярній до опорної поверхні, а також характеристики самої опорної поверхні. Запропонований підхід дозволяє врахувати вертикальні й кутові коливання підресореної й непідресорених мас; в'язко-пружні характеристики підвіски й шин трактора. Для побудови рівнянь руху секцій трактора використано рівняння Лагранжа другого роду та, виходячи з конструктивних особливостей шарнірно-зчленованого колісного трактора, прийнятий ряд припущень для спрощення математичної моделі. У розглянутому варіанті сполучний шарнір трактора являє собою стандартну конструкцію без пружного елемента. Тобто, зневажаючи тертям у горизонтальному шарнірі, прийнято, що секції трактора рухаються у вертикальній поперечній площині незалежно друг від друга (параметри руху та опорної поверхні не допускають змикання упорів сполучного шарніра). Зміна кутів нахилу твірних нерівностей поверхні під колесами секцій шарнірно-зчленованого трактору задана у вигляді періодичних функцій. В якості параметру динамічної стійкості положення розглянуті кутові швидкості секцій у поперечній площині, перпендикулярній до опорної поверхні.

Проведено розрахунки на прикладі колісного шарнірно-зчленованого трактора з номінальним тяговим зусиллям 35 кН з відповідними характеристиками з застосуванням чисельного розв'язку з використанням ПЕОМ (чисельний метод Рунге-Кутти з корекцією кроку за часом). Похибка у визначенні максимальних кутових швидкостей секцій у вертикальній поперечній площині з використанням математичного моделювання, порівняно з експериментальними даними, складала не більше 10%.

**Ключові слова:** стійкість, колісна машина, математичне моделювання, чисельний метод.

**Вступ.** При вивченні процесу руху колісних машин, у тому числі і шарнірно-зчленованих, нерівностями для оцінки їх стійкості положення і плавності ходу звичайно користуються різні теорії, в яких залишаються однаковими як показники параметрів коливальних процесів, так і способи складання диференціальних рівнянь руху. Відрізняються вони, серед іншого, також визначенням функції впливу нерівностей поверхні на колісну машину. Так, в аналітичній теорії в якості функції впливу використовують синусоїдальні профілі нерівностей реально існуючих поверхонь, якими рухаються машини, а в статистичній – кореляційну функцію. При цьому обидві теорії за вихідні дані функції впливу використовують параметри видимих нерівностей опорної поверхні. Питаннями стійкості положення тракторних агрегатів при їхній роботі за важких дорожніх умов, у тому числі на схилах, займався ряд вітчизняних і закордонних вчених. Але і в теперішній час питання математичного моделювання руху шарнірно-

зчленованих колісних машин задля забезпечення їхньої стійкості положення є актуальними.

### **Аналіз останніх досягнень і публікацій.**

При описі руху колісної машини математичною моделлю прийнято представляти її у вигляді багатомасової системи, що складається з підресорених і непідресорених мас [1-3]. Дослідженнями характеристик руху динамічних систем, у тому числі колісних машин, займалася велика кількість авторів [4-14]. При цьому більша частина робіт була спрямована на визначення параметрів стійкості руху й плавності ходу, а в роботах [4, 7, 8] у якості інструмента математичного моделювання використовувалися рівняння Лагранжа другого роду. Визначення характеристик стійкості положення нерозривно пов'язане як з конструктивними параметрами машини, так і з параметрами руху. Встановлено, що великий вплив на стійкість положення при русі нерівностями виявляють різні конструктивні фактори, у тому числі – підвіска та шини машин [4, 5, 15, 16]. У той же час питанням

вивчення динамічної стійкості положення шарнірно-зчленованих колісних машин під час руху нерівностями приділено недостатньо уваги.

**Мета и постановка завдань.** Метою роботи є підвищення стійкості положення шарнірно-зчленованих колісних тракторів на основі аналізу їх руху нерівностями. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання: обґрунтувати ряд припущень для спрощення математичної моделі; обрати збудувальну функцію, що задовільно описуючи реальні збудування, разом з тим мала б досить просте аналітичне вираження; отримати математичної моделі руху секцій шарнірно-зчленованої колісної машини нерівностями, що дозволяє врахувати вертикальні й кутові коливання піддресореної й невіддресорених мас, в'язко-пружні характеристики підвіски й шин трактора.

**Математичне моделювання руху шарнірно-зчленованої колісної машини.** При складанні динамічної моделі руху шарнірно-зчленованого колісного трактора нерівностями були враховані основні конструктивні параметри, що впливають на стійкість його положення в площині, перпендикулярній до опорної поверхні, а також характеристики самої опорної поверхні. Запропонований підхід дозволяє врахувати вертикальні й кутові коливання піддресореної й невіддресорених мас; взаємодію секцій у процесі руху; в'язко-пружні характеристики підвіски й шин трактора.

Виходячи з конструктивних особливостей шарнірно-зчленованого колісного трактора, прийнятий ряд припущень для спрощення математичної моделі: шарнірно-зчленований трактор рухається з постійною швидкістю, наїзд на перешкоди здійснюється колесами одного борту (такий режим руху відповідає найпоширенішим умовам реальної експлуатації); виключається вплив жорсткості напіврам на динаміку руху (деформації напіврам мізерно малі й не виявляють істотного впливу на розглянуті процеси); зв'язок між напіврамами здійснюється через шарнір (із пружним елементом при його наявності). При цьому відсутні підвищені зазори, зношування, деформації й втрати на тертя; не враховується поперечна деформація шин (внаслідок їхньої значної жорсткості); центри мас частин трактора в початковий момент перебувають у поздовжній площині його симетрії; трактор рухається твердою опорною поверхнею, її деформація не враховується; вагою елементів підвіски передньої секції зневажаємо.

У даному варіанті сполучний шарнір трактора являє собою стандартну конструкцію без пружного елемента. Тобто, зневажаючи тертям у горизонтальному шарнірі, можна прийняти, що секції трактора рухаються у вертикальній поперечній

площині незалежно друг від друга (параметри руху та опорної поверхні не допускають змикання упорів сполучного шарніра).

Після прийняття цих допущень були складені динамічні моделі руху передньої секції трактора (із чотирма ступенями волі) і задньої секції (із двома ступенями волі) (рис. 1). Прийняті моделі використовувалися надалі для складання математичного опису руху секцій трактора.

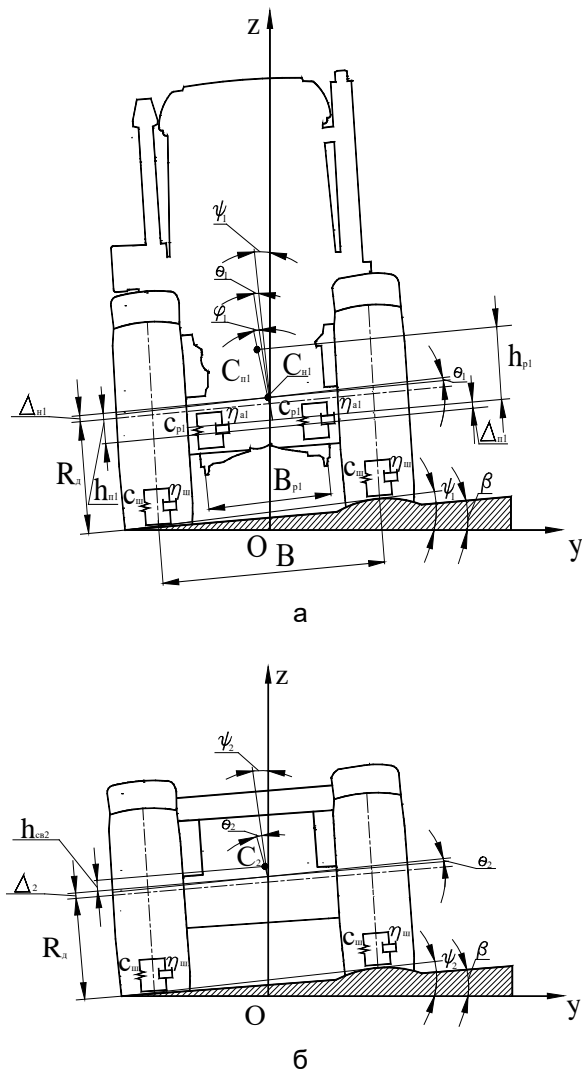


Рис. 1. Схеми руху секцій шарнірно-зчленованої колісної машини без пружного елемента у горизонтальному шарнірі: а – передня секція; б – задня секція

нерухома система координат  $ZOY$  пов'язана з горизонтальною поверхнею, причому вісь  $OZ$  проходить через середину мосту трактора. Приймаємо, що дана точка рухається тільки в поздовжній площині  $ZOX$ . Координати центрів мас трактора позначимо через  $z_{H1}$ ,  $y_{H1}$  для невіддресоре-

ної маси передньої секції, через  $z_{п1}$ ,  $y_{п1}$  для підресореної маси передньої секції, через  $z_2$ ,  $y_2$  для задньої секції.

При складанні динамічної моделі введемо наступні позначення для секцій шарнірно-зчленованого трактора (індексом 1 позначені параметри передньої секції, індексом 2 – задньої секції трактора):  $m_{н1}$  – маса непідресореної частини передньої секції;  $m_{п1}$  – маса підресореної частини передньої секції;  $m_{п1} + m_{н1} = m_1$  – маса передньої секції;  $m_2$  – маса задньої секції;  $J_{н1}$  – центральний момент інерції непідресореної маси передньої секції;  $J_{п1}$  – центральний момент інерції підресореної маси передньої секції;  $J_2$  – центральний момент інерції задньої секції;  $C_{p1}$  – жорсткість ресори підвіски у вертикальному напрямку;  $\eta_{a1}$  – коефіцієнт демпфірування амортизатора підвіски;  $C_w = C_{w1} = C_{w2}$  – радіальна жорсткість шини;  $\eta_w = \eta_{w1} = \eta_{w2}$  – коефіцієнт демпфірування шини;  $R_\partial = R_{\partial1} = R_{\partial2}$  – динамічний радіус колеса;  $\psi_1$  – кут нахилу утворюючої нерівності поверхні під колесом передньої секції (рис. 1а);  $\psi_2$  – кут нахилу утворюючої нерівності поверхні під колесом задньої секції (рис. 1б);  $\theta_1$  – кут нахилу передньої секції внаслідок нерівномірної радіальної деформації шин;  $\theta_2$  – кут нахилу задньої секції внаслідок нерівномірної радіальної деформації шин;  $\phi_1$  –

кут нахилу підресореної маси передньої секції на підвісці;  $h_{п1}$  – відстань між підвіскою передньої секції у статичному горизонтальному положенні трактора й центром непідресореної маси;  $h_{p1}$  – плече крену підресореної маси передньої секції;  $B_{p1}$  – ресорна база;  $h_{ce2}$  – відстань між центром мас задньої секції й віссю обертання колеса;  $\Delta_{н1}$  – лінійне переміщення центра непідресореної маси передньої секції нормаллю до опорної поверхні;  $\Delta_{п1}$  – лінійне переміщення центру підресореної маси передньої секції нормаллю до осі коліс;  $\Delta_2$  – лінійне переміщення центру мас задньої секції нормаллю до опорної поверхні.

Відповідно до прийнятих припущень для дослідження процесу руху секцій шарнірно-зчленованого колісного трактора розглянемо рух центрів його підресореної й непідресореної мас передньої секції й центру мас задньої секції щодо координатних осей  $Y$  і  $Z$ . При цьому передню секцію трактора будемо розглядати як двохмасову динамічну систему із чотирма ступенями волі, відповідними незалежним параметрам  $\Delta_{н1}$ ,  $\Delta_{п1}$ ,  $\phi_1$ ,  $\theta_1$ . Задню секцію трактора будемо розглядати як одномасову динамічну систему із двома ступенями волі, відповідними незалежним параметрам  $\Delta_2$ ,  $\theta_2$ .

На рис. 2 показаний приклад поверхні дороги з нерівностями, якою здійснюється рух.

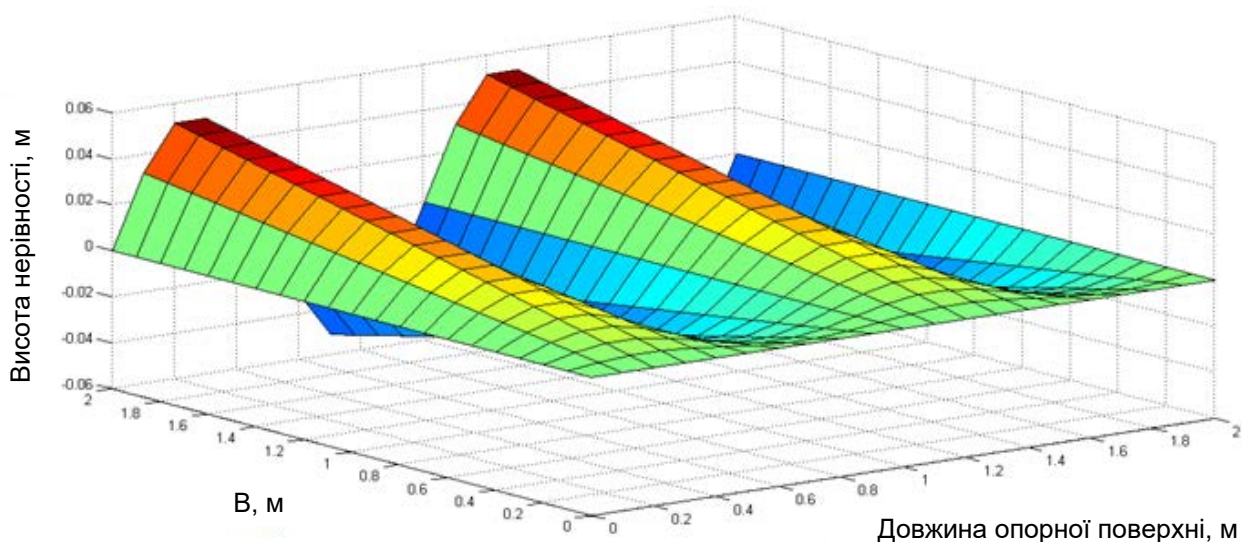


Рис. 2. Загальний вид поверхні, якою здійснюється рух шарнірно-зчленованого колісного трактора

При розв'язанні прикладних завдань, пов'язаних з використанням спрощеної моделі, виникає необхідність у виборі таких збудовальних функцій, що задовільно описуючи реальні збудування, разом з тим мали б досить просте аналітичне вираження. З періодичних функцій зазначеним умовам добре задовольняють синусоїди, які можуть служити елементами для побудови довільних

періодичних функцій. Стосовно до завдань стійкості синусоїдальні функції зручні тим, що ними можуть апроксимуватися імпульсні впливи від збудувань, що мають форму квадратного імпульсу, періодичної квадратної або пилкоподібної хвилі і так далі. Виходячи із цього, кути нахилу твірних нерівностей поверхні під колесами секцій  $\psi_1$  і  $\psi_2$  задаються у вигляді періодичних функцій.

З урахуванням зсуву за часом моментів наїзду коліс одного борту на нерівності поверхні, ці функції будуть мати вигляд

$$\psi_1 = \beta + A_\psi \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{l_H} \cdot x\right); \quad (1)$$

$$\psi_2 = \beta + A_\psi \cdot \cos\left[\frac{2 \cdot \pi}{l_H} \cdot (x - L)\right], \quad (2)$$

де  $A_\psi = \arcsin(h_H/B)$  – амплітуда зміни  $\psi$ ;  $h_H$  – амплітуда коливань нерівностей;  $l_H$  – відстань між нерівностями;  $L$  – поздовжня колісна база трактора;  $x$  – поточне значення координати центра мас невіднесеної частини передньої секції у напрямку руху машини.

Для побудови рівнянь руху секцій трактора будемо використовувати рівняння Лагранжа другого роду, оскільки при прийнятих припущеннях розглянуті механічні системи є голономними. Для цього необхідно виписати вирази для кінетичної й потенційної енергії через узагальнені координати. Попередньо визначимо геометричні положення центрів мас піднесеної та невіднесеної частин передньої секції, задньої секції шарнірно-зчленованого трактора в прийнятій системі координат.

Для прийнятої динамічної системи виписано рівняння Лагранжа другого роду з урахуванням сил в'язкої дисипації

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (3)$$

де  $T$ ,  $\Pi$  – кінетична й потенційна енергія системи відповідно;  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  – узагальнені координати й швидкості переміщення центрів мас;  $Q_i$  – узагальнені сили, що відповідають дисипативним непотенційним силам.

За узагальнені координати прийняті введені раніше лінійні переміщення центрів невіднесеної та піднесеної мас передньої секції  $q_1 = \Delta_{H1}$ ,  $q_3 = \Delta_{П1}$ , лінійне переміщення центра мас задньої секції  $q_5 = \Delta_2$  та кутові координати  $q_2 = \theta_1$ ,  $q_6 = \theta_2$ ,  $q_4 = \phi_1$  – кути нахилу передньої та задньої секцій на шинах і піднесеної маси передньої секції на підвісці відповідно.

Отримано вирази для визначення компонент лінійних швидкостей. Також були визначені кутові швидкості секцій і виписані вирази для повної кінетичної енергії  $T_1$  і  $T_2$  досліджуваних систем

$$\begin{aligned} T_1 = & \frac{m_{H1}}{2} \cdot [(\dot{y}_{H1})^2 + (\dot{z}_{H1})^2] + \\ & + \frac{m_{П1}}{2} \cdot [(\dot{y}_{П1})^2 + (\dot{z}_{П1})^2] + \\ & + \frac{1}{2} \cdot J_{H1} \cdot (\dot{\psi}_1 + \dot{\theta}_1)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \cdot J_{П1} \cdot (\dot{\psi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\phi}_1)^2; \end{aligned} \quad (4)$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \cdot [(\dot{y}_2)^2 + (\dot{z}_2)^2] + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot (\dot{\psi}_2 + \dot{\theta}_2)^2. \quad (5)$$

Потенційна енергія передньої секції обумовлена вертикальним положенням центрів невіднесеної та піднесеної мас і деформацією пружних елементів  $C_{P1}$  і  $C_{Ш}$ . Потенційна енергія задньої секції обумовлена положенням центру мас і деформацією пружних зв'язків  $C_{Ш}$ .

Потенційна енергія  $\Pi_{c1}$ , обумовлена зміною положення центрів невіднесеної та піднесеної мас передньої секції, визначається залежністю

$$\begin{aligned} \Pi_{c1} = & m_{H1} \cdot g \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot B \cdot \text{tg}\psi_1 + \right. \\ & \left. + \frac{R_d}{\cos\psi_1} + \Delta_{H1} \cdot \cos\psi_1 \right) + \\ & + m_{П1} \cdot g \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot B \cdot \text{tg}\psi_1 + \frac{R_d}{\cos\psi_1} + \right. \\ & \left. + \Delta_{H1} \cdot \cos\psi_1 + (h_{П1} + \Delta_{П1}) \times \right. \\ & \left. \times \cos(\psi_1 + \theta_1) + h_{P1} \cdot \cos(\psi_1 + \theta_1 + \phi_1) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Потенційна енергія  $\Pi_{c2}$ , обумовлена зміною положення центру мас задньої секції шарнірно-зчленованого трактора, визначається залежністю

$$\begin{aligned} \Pi_{c2} = & m_2 \cdot g \times \\ & \times \left( \frac{1}{2} \cdot B \cdot \text{tg}\psi_2 + \frac{R_d}{\cos\psi_2} + \right. \\ & \left. + \Delta_2 \cdot \cos\psi_2 + h_{CB2} \cdot \cos(\psi_2 + \theta_2) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Потенційна енергія  $\Pi_{P1}$ , обумовлена деформацією ресор підвіски передньої секції, визначається залежністю

$$\begin{aligned} \Pi_{P1} = & \frac{C_{P1} \cdot (\Delta_{П1} + \frac{B_{P1}}{2} \cdot \phi_1)^2}{2} + \\ & + \frac{C_{P1} \cdot (\Delta_{П1} - \frac{B_{P1}}{2} \cdot \phi_1)^2}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Потенційні енергії  $\Pi_{Ш1}$  та  $\Pi_{Ш2}$ , обумовлені деформацією шин передньої та задньої секцій відповідно, визначаються залежностями

$$\begin{aligned} \Pi_{Ш1} = & \frac{C_{Ш} \cdot (\Delta_{H1} + \frac{B}{2} \cdot \theta_1)^2}{2} + \\ & + \frac{C_{Ш} \cdot (\Delta_{H1} - \frac{B}{2} \cdot \theta_1)^2}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{Ш2} = & \frac{C_{Ш} \cdot (\Delta_2 + \frac{B}{2} \cdot \theta_2)^2}{2} + \\ & + \frac{C_{Ш} \cdot (\Delta_2 - \frac{B}{2} \cdot \theta_2)^2}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

Вираз для сумарної потенційної енергії  $\Pi_1$  передньої секції надано у вигляді суми потенційних енергій обумовлених зміною положення центрів

непідресореної та підресореної мас передньої секції, деформацією ресор підвіски передньої секції, деформацією шин передньої секції

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Pi_{c1} + \Pi_{p1} + \Pi_{ш1} = \\ &= m_{н1} \cdot g \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot B \cdot \operatorname{tg}\psi_1 + \frac{R_d}{\cos\psi_1} + \right) + \\ &+ m_{п1} \cdot g \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot B \cdot \operatorname{tg}\psi_1 + \frac{R_d}{\cos\psi_1} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{н1} \cdot \cos\psi_1 + (h_{п1} + \Delta_{п1}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos(\psi_1 + \theta_1) + \right. \\ &\quad \left. + h_{p1} \cdot \cos(\psi_1 + \theta_1 + \phi_1) \right) + \\ &+ \frac{C_{p1} \cdot (\Delta_{п1} + \frac{B_{p1}}{2} \cdot \phi_1)^2}{2} + \\ &+ \frac{C_{p1} \cdot (\Delta_{п1} - \frac{B_{p1}}{2} \cdot \phi_1)^2}{2} + \\ &+ \frac{C_{ш} \cdot (\Delta_{н1} + \frac{B}{2} \cdot \theta_1)^2}{2} + \frac{C_{ш} \cdot (\Delta_{н1} - \frac{B}{2} \cdot \theta_1)^2}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Вираз для сумарної потенційної енергії  $\Pi_2$  задньої секції надано у вигляді

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \Pi_{c2} + \Pi_{ш2} = m_2 \cdot g \times \\ &\times \left( \frac{1}{2} \cdot B \cdot \operatorname{tg}\psi_2 + \frac{R_d}{\cos\psi_2} + \Delta_2 \cdot \cos\psi_2 + \right) + \\ &\quad + h_{св2} \cdot \cos(\psi_2 + \theta_2) \\ &+ \frac{C_{ш} \cdot (\Delta_2 + \frac{B}{2} \cdot \theta_2)^2}{2} + \frac{C_{ш} \cdot (\Delta_2 - \frac{B}{2} \cdot \theta_2)^2}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Вирази для потенційної енергії пружних елементів виписані приблизно, з точністю до квадратичних щодо узагальнених змінних доданків. Точні вирази не наведені через їхню громіздкість, а також, оскільки надалі передбачається процедура лінеаризації.

Узагальнені сили визначаються дисипацією у підвісці передньої секції та шинах двох секцій і можуть бути представлені у вигляді виразів

$$\begin{aligned} Q_1 &= -2\eta_{ш}\dot{\Delta}_{н1}, Q_2 = \\ &= -\frac{B^2}{2}\eta_{ш}\dot{\theta}_1, Q_3 = -2\eta_{a1}\dot{\Delta}_{п1}, \\ Q_4 &= -\frac{L_{p1}^2}{2}\eta_{a1}\dot{\phi}_1, \\ Q_5 &= -2\eta_{ш}\dot{\Delta}_2, \\ Q_6 &= -\frac{B^2}{2}\eta_{ш}\dot{\theta}_2. \end{aligned} \quad (13)$$

З врахуванням викладеного вище отримані рівняння руху секцій шарнірно-зчленованого колісного трактора нерівностями. Через малість

введених узагальнених координат отримані рівняння Лагранжа були лінеаризовані щодо положення рівноваги, яка відповідає горизонтальному положенню трактора. При цьому помилка, що допускається при лінеаризації моделі, іде в запас стійкості [17]. Лінеаризовані рівняння руху зручно представити в матричному вигляді

$$A_i \ddot{q}_i + D_i \dot{q}_i + C_i q_i = F_i \quad (14)$$

де  $q_1 = (\Delta_{н1}, \theta_1, \Delta_{п1}, \phi_1)^T$  – вектор-стовпець узагальнених координат для передньої секції;  $q_2 = (\Delta_2, \theta_2)^T$  – вектор-стовпець узагальнених координат для задньої секції;  $A, D, C$  – відповідно матриця кінетичної енергії, матриця дисипації, матриця потенційної енергії;  $F$  – вектор правих частин, який містить вирази для сили інерції, що відповідає зміні кута  $\psi$ ;  $i$  – номер секції.

Вирази для елементів матриць  $A_1, D_1, C_1$  мають вигляд для передньої секції:

$$A_1 = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & m_{п1} & 0 \\ m_{п1} \times & & m_{п1} h_{p1} \times & \\ 0 \times (h_{p1} - h_{н1})^2 + 0 \times (h_{p1} - h_{н1}) + & & & \\ & J_{п1} + J_{н1} & & J_{п1} \\ m_{п1} & 0 & m_{п1} & 0 \\ m_{п1} h_{p1} \times & & & \\ 0 \times (h_{p1} - h_{н1}) + 0 & & m_{п1} h_{p1}^2 + J_{п1} & \\ & & & J_{п1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2\eta_{ш} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{2}\eta_{ш} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\eta_{a1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_{p1}^2}{2}\eta_{a1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2C_{ш} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{2}C_{ш} - & 0 & -m_{п1}gh_{p1} \\ 0 & -m_{п1}g \times & 2C_{p1} & 0 \\ & \times (h_{p1} - h_{н1}) & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B_{p1}^2}{2}C_{p1} - \\ & & & -m_{п1}gh_{p1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Вирази для елементів матриць  $A_2, D_2, C_2$  мають вигляд для задньої секції:

$$A_2 = \begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_2 h_{св2}^2 + J_2 \end{pmatrix}; \quad (18)$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 2\eta_{ш} & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{2}\eta_{ш} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2C_{ш} & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{2}C_{ш} - m_2gh_{св2} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Вирази для елементів вектора  $F$  були представлені у вигляді розкладань за ступенями  $\psi(t)$  і  $\dot{\psi}(t)$  до третього порядку включно, що дає можливість враховувати досить великі величини відхилення  $\psi$  від нульового рівня.

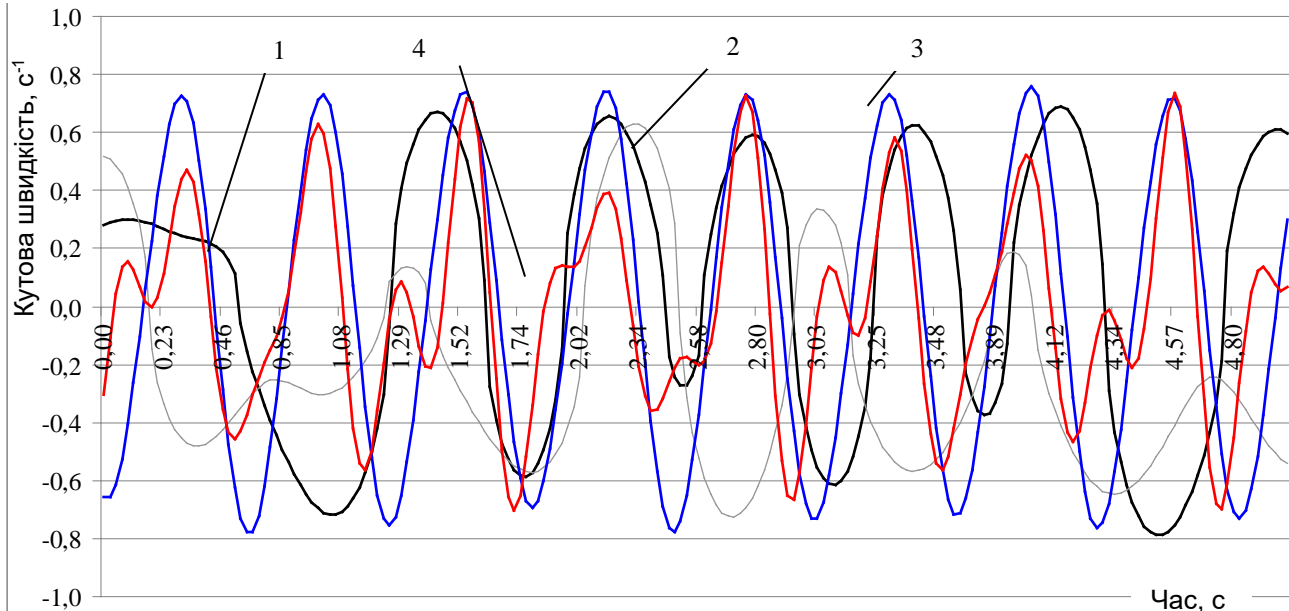


Рис. 3. Кутові швидкості секцій при русі шарнірно-зчленованого колісного трактора ХТА-200 «Слобожанець» поверхню з істотними нерівностями (пружний елемент в шарнірі відсутній):  
 1 – передня секція (експеримент); 2 – задня секція (експеримент); 3 – передня секція (моделювання); 4 – задня секція (моделювання)

Розрахунки проводилися для наступних прийнятих значень основних параметрів колісного шарнірно-зчленованого трактора ( $m_{п1}=5000$  кг,  $m_{н1}=1080$  кг,  $m_2=2900$  кг,  $h_{с1}=1,04$  м,  $h_{с2}=0,75$  м,  $J_{п1}=1840$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_{н1}=170$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_2=273$  кг·м<sup>2</sup>,  $B=1,86$  м,  $L=2,86$  м,  $R_d=0,65$  м,  $C_{р1}=560$  кН/м,  $C_{ш}=800$  кН/м,  $\eta_a=300$  Н·с/м,  $\eta_{ш}=100$  Н·с/м,  $h_{р1}=0,41$  м,  $B_{р1}=0,83$  м,  $h_{п1}=0,15$  м) і характеристик процесу руху при проведенні експериментальних досліджень (швидкість руху трактора  $V=4,2$  м/с,  $\beta=0^\circ$ , амплітуда коливань  $h_n=0,1$  м, відстань між нерівностями  $l_n=2$  м). Параметри опорної поверхні при математичному моделюванні визначені, виходячи з реальної поверхні при проведенні експериментальних досліджень і даних, наведених у роботі [18]. Для розв'язку систем диференціальних рівнянь був використаний програмний пакет MATLAB. На рисунку 3 наведені результати математичного моделювання у порівнянні з результатами експериментального дослідження. Похибка у визначенні максимальних куткових швидкостей секцій у вертикальній поперечній площині з використанням математичного

моделювання, порівняно з експериментальними даними, складала не більше 10%.

В якості параметру динамічної стійкості положення розглянуті кутові швидкості секцій у поперечній площині, перпендикулярній до опорної поверхні.

**Висновки.** В результаті проведених теоретичних досліджень отримано математичну модель руху секцій шарнірно-зчленованої колісної машини нерівностями. Запропонований підхід дозволяє врахувати вертикальні й кутові коливання підресореної й невідресорених мас; взаємодію секцій у процесі руху; в'язко-пружні характеристики підвіски й шин трактора.

Проведено розрахунки на прикладі колісного шарнірно-зчленованого трактора з номінальним тяговим зусиллям 35 кН з відповідними характеристиками з застосуванням чисельного розв'язку з використанням ПЕОМ (чисельний метод Рунге-Кутти з корекцією кроку за часом). Похибка у визначенні максимальних куткових швидкостей секцій у вертикальній поперечній площині з використанням математичного моделювання, порівняно з експериментальними даними, складала не більше 10%.

## Література

1. Анилович В. Я. Анализ результатов теоретических и экспериментальных исследований колебаний трактора Т-150К с объединенной подвеской остова и сиденья / В. Я. Анилович, М. А. Зинченко // Прогнозирование и повышение надежности сельскохозяйственной техники. – 1980. – С. 9-12.

2. Мартынюк А. А. Динамика и устойчивость движения колесных транспортных машин / Мартынюк А. А., Лобас Л. Г., Никитина Н. В. – К.: Техніка, 1981. – 223 с.

3. Хачатуров А. А. Динамика системы дорогашина-автомобиль-водитель / [Хачатуров А. А., Афанасьев В. Л., Васильев В. С. и др.]; под ред. А. А. Хачатурова. – М.: Машиностроение, 1976. – 535 с.

4. Кальченко Б. И. Комплексная оценка динамической устойчивости и плавности хода колесных тракторов / Б. И. Кальченко, Н. М. Кириенко, Н. А. Дорошенко, Е. Н. Резников // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1987. – № 7. – С. 6-10.

5. Чудаков Д. А. Основы теории и расчета трактора и автомобиля. Изд. 2-е перераб. и доп. / Чудаков Д. А. – М.: «Колос». – 1972. – 384 с.

6. Смирнов Г. А. Теория движения колесных машин / Смирнов Г. А. – М.: Машиностроение, 1990. – 352 с.

7. Туренко А. Н. Основы прикладной теории колебаний: учебн. пособие / [Туренко А. Н., Клименко В. И., Богомолов В. А., Ходырев С. Я., Сопко А. Д.]. – Х.: ХНАДУ, 2002. – 128 с.

8. Пащенко В. Ф. Методика построения математических моделей устойчивости функционирования механических систем: монография / В. Ф. Пащенко, В. В. Ким. – Х.: Харьк. нац. аграр. ун-т им. В. В. Докучаева, 2010. – 116 с.

9. Малиновский Е. Ю. Динамика самоходных машин с шарнирной рамой (колебания и устойчивость движения) / Е. Ю. Малиновский, М. М. Гайцгори. – М.: Машиностроение, 1974. – 176 с.

10. Артёмов М. П. Динамічна стабільність мобільних сільськогосподарських агрегатів: дис. ... д-ра техн. наук: 05.05.11 / Артёмов Микола Прокопович. – Х., 2014. – 399 с.

11. Pflug H. C. Lateral dynamic behaviour of truck-trailer combinations due to the influence of the load / H. C. Pflug // Vehicle Systems Dynamics. – 1986. – Vol. 15. – pp. 155–175.

12. Stanescu N.-D. Two degrees of freedom non-linear model to study the automobile's vibrations / N.-D. Stanescu // Advances in Mathematical and Computational Methods. – 2010. – Vol. XVII, Iss 1. – pp. 133–138.

13. Nandedkar V. M. Active control of quarter-car suspension system using linear quadratic re-

gulator / V. M. Nandedkar, K. R. Borole, G. J. Vikhe, M. P. Nagarkar // International Journal of Automotive and Mechanical Engineering. – 2011. – Vol. 3. – pp. 364-372.

14. Elmadany M. M. Design of an active suspension for a heavy duty truck using optimal control theory / M. M. Elmadany // Computers and Structures. – 1989. – №31 (3). – pp. 385-393.

15. Клец Д. М. Концепция обеспечения стабильности показателей устойчивости и управляемости автомобилей: дисс. ... д-ра техн. наук: 05.22.20 / Клец Дмитрий Михайлович. – Х., 2015. – 528 с.

16. Межов А. Е. О влиянии дорожных неровностей на устойчивость движения автомобиля / А. Е. Межов // Динамика и прочность автомобиля и трактора. – 1983. – С. 141-146.

17. Кальченко Б. И. Безопасность работы на тракторах с шарнирно-сочлененной рамой / Б. И. Кальченко // Охрана труда в сельском хозяйстве: межвуз. сб. науч. тр. МСХ СССР. – Вильнюс, 1986. – Вып. 1. – С. 95-98.

18. Говорущенко Н. Я. Системотехника транспорта (на примере автомобильного транспорта). 2-е изд., перераб. и доп. / Н. Я. Говорущенко, А. Н. Туренко. – Х.: РИО ХГАДТУ, 1999. – 468 с.

## Reference

1. Anilovich V. Ja. 1980. Analiz rezul'tatov teoreticheskikh i jeksperimental'nyh issledovanij kolebanij traktora T-150K s ob#edinennoj podveskoj ostova i siden'ja / V. Ja. Anilovich, M. A. Zinchenko // Prognozirovanie i povyshenie nadezhnosti sel'skohozjajstvennoj tehniki. – pp. 9-12.

2. Martynjuk A. A. 1981. Dinamika i ustojchivost' dvizhenija kolesnyh transportnyh mashin / Martynjuk A. A., Lobas L. G., Nikitina N. V. – K.: Tehnika, 223 p.

3. Hachaturov A. A. 1976. Dinamika sistemy doroga-shina-avtomobil'-voditel' / [Hachaturov A. A., Afanas'ev V. L., Vasil'ev V. S. i dr.]; pod red. A. A. Hachaturova. – M.: Mashinostroenie, – 535 p.

4. Kal'chenko B. I. 1987. Kompleksnaja ocenka dinamicheskoy ustojchivosti i pлавnosti hoda kolesnyh traktorov / B. I. Kal'chenko, N. M. Kirienko, N. A. Doroshenko, E. N. Reznikov // Traktory i sel'skohozmashiny. – № 7. 6-10.

5. Chudakov D. A. 1972. Osnovy teorii i rascheta traktora i avtomobilja. Izd. 2-e pererab. i dop. / Chudakov D. A. – M.: «Kolos». – 384 p.

6. Smirnov G. A. 1990. Teorija dvizhenija kolesnyh mashin / Smirnov G. A. – M.: Mashinostroenie, – 352 p.

7. Turenko A. N. 2002. Osnovy prikladnoj teorii kolebanij: uchebn. posobie / [Turenko A. N., Klimentko V. I., Bogomolov V. A., Hodyrev S. Ja., Sopko A. D.]. – H.: HNADU, 128 p.

8. Pashhenko V. F. 2010. Metodika postroeniya matematicheskikh modelej ustojchivosti funkcionirovaniya mehanicheskikh sistem: monografija / V. F. Pashhenko, V. V. Kim. – H.: Har'k. nac. agrar. un-t im. V. V. Dokuchaeva, – 116 p.

9. Malinovskij E. Ju. 1974. Dinamika samohodnyh mashin s sharnirnoj ramoju (kolebanija i ustojchivost' dvizhenija) / E. Ju. Malinovskij, M. M. Gajgori. – M.: Mashinostroenie, – 176 p.

10. Art'omov M. P. 2014. Dynamichna stabilnist' mobil'nyh sil'skogospodars'kyh agregativ: dys. ... d-ra tehn. nauk: 05.05.11 / Art'omov Mykola Prokopovych. – H., 399 p.

11. Pflug H. C. 1986. Lateral dynamic behaviour of truck-trailer combinations due to the influence of the load / H. C. Pflug // Vehicle Systems Dynamics. – Vol. 15. – pp. 155-175.

12. Stanescu N.-D. 2010. Two degrees of freedom non-linear model to study the automobile's vibrations / N.-D. Stanescu // Advances in Mathematical and Computational Methods. – Vol. XVII, Iss 1. – pp. 133-138.

13. Nandedkar V. M. 2011. Active control of quartercar suspension system using linear quadratic regulator / V. M. Nandedkar, K. R. Borole,

G. J. Vikhe, M. P. Nagarkar // International Journal of Automotive and Mechanical Engineering. – Vol. 3. – pp. 364-372.

14. Elmadany M. M. 1989. Design of an active suspension for a heavy duty truck using optimal control theory / M. M. Elmadany // Computers and Structures. — №31 (3). – pp. 385-393.

15. Klec D. M. 2015. Koncepcija obespechenija stabil'nosti pokazatelej ustojchivosti i upravljajemosti avtomobilej: disc. ... d-ra tehn. nauk: 05.22.20 / Klec Dmitrij Mihajlovich. – H., 528 p.

16. Mezhov A. E. 1983. O vlijanii dorozhnyh nerovnostej na ustojchivost' dvizhenija avtomobilija / A. E. Mezhov // Dinamika i prochnost' avtomobilija i traktora. – pp. 141-146.

17. Kal'chenko B. I. 1986. Bezopasnost' raboty na traktorah s sharnirno-sochlenennoj ramoju / B. I. Kal'chenko // Ohrana truda v sel'skom hozjajstve: mezhvuz. sb. nauch. tr. MSH SSSR. – Vil'njus, – Vyp. 1. – pp. 95-98.

18. Govorushhenko N. Ja. 1999. Sistemotehnika transporta (na primere avtomobil'nogo transporta). 2-e izd., pererab. i dop. / N. Ja. Govorushhenko, A. N. Turenko. – H.: RIO HGADTU, 468 p.

#### Аннотация

### Математическое моделирование движения шарнирно-сочлененной колесной машины без упругого элемента в соединительном шарнире

Е.А. Дубинин, Д.М. Клец, А.С. Полянский, В.В. Задорожня

В результате проведенных теоретических исследований получена математическая модель движения секций шарнирно-сочлененной колесной машины по неровностям. При составлении динамической модели движения шарнирно-сочленованного колесного трактора по неровностям были учтены основные конструктивные параметры, которые влияют на стойкость его положения в плоскости, перпендикулярной к опорной поверхности, а также характеристики самой опорной поверхности. Предложенный подход позволяет учесть вертикальные и угловые колебания подрессоренной и неподрессоренных масс; вязко-упругие характеристики подвески и шин трактора. Для построения уравнений движения секций трактора использовано уравнение Лагранжа второго рода и, исходя из конструктивных особенностей шарнирно-сочлененного колесного трактора, принят ряд предположений для упрощения математической модели. В рассмотренном варианте соединительный шарнир трактора представляет собой стандартную конструкцию без упругого элемента. То есть, пренебрегая трением в горизонтальном шарнире, принято, что секции трактора двигаются в вертикальной поперечной плоскости независимо одна от другой (параметры движения и опорной поверхности не допускают смыкания упоров соединительного шарнира). Изменение углов наклона образующих неровностей поверхности под колесами секций шарнирно-сочлененного трактора задана в виде периодических функций. В качестве параметра динамической устойчивости положения рассмотрены угловые скорости секций в поперечной плоскости, перпендикулярной к опорной поверхности.

Проведены расчеты на примере колесного шарнирно-сочлененного трактора с номинальным тяговым усилием 35кН с соответствующими характеристиками с применением численного решения с использованием ПЕОМ (численный метод Рунге-Кутты с коррекцией шага по времени). Погрешность в определении максимальных угловых скоростей секций в вертикальной поперечной плоскости с использованием математического моделирования, по сравнению с экспериментальными данными, составляла не больше 10%.

**Ключевые слова:** *устойчивость, колесная машина, математическое моделирование, численный метод.*



**Abstract**

**Mathematical design of motion of the joined wheeled machine without resilient element in connecting hinge**

**Ye.A. Dubinin, D.M. Klets, A.S. Polianskyi, V.V. Zadorozhnaya**

As a result of undertaken theoretical studies, the mathematical model of motion on unevenness of surface of the articulated wheeled machine sections is got. At drafting of dynamic model of motion on unevenness of surface of the articulated wheeled machine the basic structural parameters, that influence on firmness of his position inplane, perpendicular to the underlayment, as well as the characteristics of supporting surface, were taken into account. The proposed approach allows to take into account vertical and angular vibrations of the sprung and the unsprung masses; visco-elastic characteristics of the tractor suspension and tires. For the construction of equalizations of tractor sections motion the Lagrange equalization is used, coming from the structural features of the articulated wheeled tractor, the row of suppositions is accepted for simplification of mathematical model. In the considered variant a connecting hinge of tractor is a standard construction without an elastic element. Thus, ignoring a friction in a horizontal hinge, it is accepted, that the sections of tractor move in a vertical transversal plane independently one from other. The change in the inclination angles of the forming surface irregularities under the wheels of the articulated tractor sections is given in the form of periodic functions. As a parameter of dynamic stability of position the angular speeds of sections are considered in a transversal plane perpendicular to the underlayment.

Calculations are conducted on the example of the articulated wheeled tractor with nominal traction force of 35 kN with corresponding characteristics with the use of numeral decision using PC (numeral Runge-Kutta method with time step correction). Error in determination of high angular speeds of sections in a vertical transversal plane with the use of mathematical design, as compared to experimental data, was not more than 10%.

**Keywords:** *stability, wheeled machine, mathematical modeling, numeral method.*

**Бібліографічне посилання / Bibliography link:**

Dubinin Ye.A., Klets D.M., Polianskyi A.S., Zadorozhnaya V.V. Mathematical design of motion of the joined wheeled machine without resilient element in connecting hinge // Engineering of nature management, 2019, #2(12), p. 51 - 59.

*Подано до редакції / Received: 18.02.2019*