УДК 631.362:532

Про розрахунок течії зерносуміші в циліндричному віброрешеті методом Бубнова-Гальоркіна

В.П. Ольшанський, В.В. Бурлака, М.В. Сліпченко, О.М. Малець

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка (м.Харків, Україна)

Названим методом побудовано наближені розв'язки нелінійного диференціального рівняння усталеного осесиметричного руху шару вібророзрідженої зернової суміші по циліндричному решету вертикальної віброцентрифуги. При виведенні диференціального рівняння руху було використано нелінійну реологічну залежність типу Севіджа, між дотичним напруженням і швидкістю деформацій зсуву. Запропоновано два варіанти розрахункових формул для обчислення швидкості потоку та об'ємної продуктивності решета, які ґрунтуються на різних апроксимаціях розподілу швидкості по товщині рухомого шару суміші. У ході порівнянь максимальних значень швидкості встановлено задовільну узгодженість результатів, до яких призводять запропоновані наближені розв'язки та числовий розв'язок крайової задачі на комп'ютері.

Ключові слова: *швидкість руху, потік суміші, циліндричне віброрешето, реалогічна залежність Севіджа, метод Бубнова-Гальоркіна.*

Вступ. Серед континуальних моделей руху сепарованих зернових сумішей набули поширення теорії, в яких прийнято лінійну ньютонову залежність дотичного напруження від швидкості деформацій зсуву [1 - 5]. Але в останні роки висловлюються думки, що при великих швидкостях деформацій зсуву, властивим і потокам зернових сумішей з невеликою товщиною рухомого шару, доцільно, замість лінійної, використовувати квадратичну реологічну залежність [6 - 8]. До цього висновку раніше прийшов Бегнолд, спираючись на власні досліди [9]. Виходячи з цього, тут для опису руху зерносуміші, в полі гравітації та відцентрової сили, залучено квадратичну реологічну залежність типу Севіджа [10-12]. Особливість його теорії полягає в тому, що, крім в'язкої складової, в ній враховується і складова сухого тертя, яка не залежить від величини швидкості. Наявність двох сталих у реологічній залежності дає можливість досягти кращого узгодження теорії з експериментом. Про гарну узгодженість теорії Севіджа з експериментальними результатами японських авторів [13], йдеться в роботах [6, 11].

Метою даної статті є виведення наближених формул та перевірка їх точності для розрахунку швидкості сталої вертикальної течії зерносуміші в циліндричному решеті віброцетрифуги. Засобом досягнення мети вибрано метод Бубнова-Гольоркіна, який добре зарекомендував себе при аналітичному розв'язанні складних нелінійних задач механіки. Названий метод використовували також і для розрахунку потоків зерносумішей в роботах [3, 14], але там розв'язували лінійні задачі.

Основна частина роботи. Щоб вивести нелінійне диференціальне рівняння усталеного руху, використовуємо відомі залежності [5].

$$\tau = \mu \frac{du}{dr}; \quad u = \frac{\rho g}{2\mu}\left(R_0^2 \ln\frac{r}{R} - \frac{r^2 - R^2}{2} \right), \quad (1)$$

в яких τ – дотичне напруження; $u = u(r)$ – швидкість вертикальної течії суміші з питомою масою ρ, яку вважаємо сталою; g – прискорення вільного падіння; r – радіальна координата; R – радіус решета; $R_0 = R - h$ – радіус вільної циліндричної поверхні суміші з товщиною шару h; μ – динамічний коефіцієнт вібров'язкості суміші.

Виразам (1) відповідає наступний розподіл дотичного напруження по товщині рухомого шару (координаті r):

$$\tau = \frac{\rho g}{2}\left(\frac{R_0^2}{r} - r \right). \quad (2)$$

Замінимо далі вираз для τ в (1) нелінійною залежністю [10 - 12]

$$\tau = \left[\mu_* \left(\frac{du}{dr} \right)^2 + f\, p(r) \right] \operatorname{sign}\left(\frac{du}{dr} \right). \quad (3)$$

Тут μ_*, f – реологічні сталі; $\rho(r)$ – надлишковий тиск в суміші, зумовлений обертанням решета навколо вертикальної вісі з кутовою швидкістю Ω.

Оскільки [5]:

$$\rho(r)=\frac{1}{2}\rho\,\Omega^2(r^2-R_0^2),$$

то (3) набуває вигляд:

$$\tau=\left[\mu_*\left(\frac{du}{dr}\right)^2+\frac{1}{2}f\Omega^2(r^2-R_0^2)\right]\operatorname{sign}\frac{du}{dr}. \quad (4)$$

Прирівнявши праві частини виразів (2) і (4), з урахуванням того що $(du/dr)\le 0$, одержуємо нелінійне диференціальне рівняння руху:

$$\left(\frac{du}{dr}\right)^2+\frac{f\rho\Omega^2}{2\mu_*}\left(r^2-R_0^2\right)+\frac{\rho g}{2\mu_*}\left(\frac{R_0^2}{r}-r\right)=0.$$

Його будемо розв'язувати при крайових умовах:

$$u(R)=0;\quad \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=R_0}=0,$$

які виражають відсутність ковзання суміші по поверхні решета та відсутність дотичних напружень на вільній поверхні суміші.

Замінимо змінну r на змінну $\xi=r-R_0$. Тоді рівняння руху та крайові умови набувають вигляд:

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2+\frac{f\rho\Omega^2}{2\mu_*}\left(2R_0\xi+\xi^2\right)+ +\frac{\rho g}{2\mu_*}\left(\frac{R_0^2}{R_0+\xi}-R_0-\xi\right)=0 \; ;$$

$$u(h)=0;\quad \left.\frac{du}{d\xi}\right|_{\xi=0}=0. \quad (5)$$

Далі побудуємо два наближених розв'язки цієї крайової задачі методом Бубнова-Гальоркіна (МБГ).

1. У першому варіанті розв'язку розподіл швидкості по товщині рухомого шару, з точністю до сталого множника A, апроксимуємо дугою квадратної параболи:

$$u(\xi)=A\left(h^2-\xi^2\right)=u(0)\left(1-\frac{\xi^2}{h^2}\right).$$

Тут $u(0)=Ah^2$, а $u(\xi)$ задовольняє крайовим умовам.

При такій апроксимації профіля швидкості маємо:

$$\frac{du}{d\xi}=-2A\xi;\quad \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2=4A^2\xi^2.$$

Використовуючи ці залежності, та диференціальне рівняння в (5), за процедурою МБГ, одержуємо вираз:

$$\int_0^h\left[4A^2\xi^2+\frac{f\rho\Omega^2}{2\mu_*}\left(2R_0\xi+\xi^2\right)+ +\frac{\rho g}{2\mu_*}\left(\frac{R_0^2}{R_0+\xi}-R_0-\xi\right)\right](h^2-\xi^2)\,d\xi=0. \quad (6)$$

Враховуючи, що:

$$\int_0^h\xi^2\left(h^2-\xi^2\right)d\xi=\frac{2}{15}h^5;$$

$$\int_0^h\left(2R_0\xi+\xi^2\right)(h^2-\xi^2)d\xi=\frac{1}{2}R_0h^4+\frac{2}{15}h^5;$$

$$\int_0^h\frac{h^2-\xi^2}{R_0+\xi}d\xi=R_0h-\frac{h^2}{2}+(h^2-R_0^2)\ln\left(1+\frac{h}{R_0}\right);$$

$$\int_0^h\left(\xi+R_0\right)(h^2-\xi^2)d\xi=\frac{1}{4}h^4+\frac{2}{3}R_0h^3,$$

Вираз (6) зводимо до квадратного рівняння відносно A, з якого одержуємо:

$$u(0)=\frac{\sqrt{15\rho g}}{4\sqrt{\mu_*}}\times \times\left\{\left(\frac{2}{3}R_0+\frac{1}{4}h\right)h^2- -R_0^2\left[R_0-\frac{h}{2}+\frac{1}{h}\left(h^2-R_0^2\right)\ln\left(1+\frac{h}{R_0}\right)\right]- -\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{15}\frac{h}{R_0}\right)\right\}^{1/2}.$$

Тут $\gamma=fR_0\Omega^2/g$.

Максимальне значення швидкості потоку $u(0)$ досягається на вільній поверхні суміші $\xi=0$.

Стосовно середньої швидкості потоку, то вона становить:

$$u_{cp}=\frac{1}{h}\int_0^h u(\xi)d\xi= =\frac{1}{h}u(0)\int_0^h\left(1-\frac{\xi^2}{h^2}\right)d\xi=\frac{2}{3}u(0).$$

Далі легко обчислити й об'ємну продуктивність решета, бо:

$$Q\approx 2\pi\left(R-\frac{h}{2}\right)hu_{cp}=\frac{4\pi}{3}\left(R-\frac{h}{2}\right)hu(0).$$

2. У другому розв'язку задачі МБГ розподіл швидкості по радіальній координаті апроксимуємо другою косинусоїди:

$$u(\xi) = c\cos\frac{\pi\xi}{2h} = u(0)\cos\frac{\pi\xi}{2h}, \qquad (8)$$

де c – сталий множник, який дорівнює максимальній швидкості потоку суміші. Подання (8) теж задовольняє крайовим умовам в (5).

Враховуючи, що:

$$\frac{du}{d\xi} = -c\frac{\pi}{2h}\sin\frac{\pi\xi}{2h};\ \left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = c^2\frac{\pi^2}{4h^2}\sin^2\frac{\pi\xi}{2h},$$

та диференціальне рівняння в (5), вказаним методом одержуємо вираз:

$$\int_0^h \left[c^2\frac{\pi^2}{4h^2}\sin^2\frac{\pi\xi}{2h} + \frac{f\rho\Omega^2}{2\mu_*}\left(2R_0\xi+\xi^2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\rho g}{2\mu_*}\left(\frac{R_0^2}{R_0+\xi} - R_0 - \xi\right)\right]\cos\frac{\pi\xi}{2h}d\xi = 0. \qquad (9)$$

Далі, приймаючи до уваги, що:

$$\int_0^h \sin^2\frac{\pi\xi}{2h}\cos\frac{\pi\xi}{2h}d\xi = \frac{2h}{3\pi};$$
$$\int_0^h (2R_0\xi+\xi^2)\cos\frac{\pi\xi}{2h}d\xi =$$
$$= \frac{2h^2}{\pi}\left[2R_0\left(1-\frac{2}{\pi}\right) + h\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)\right];$$
$$\int_0^h \left(\xi+R_0\right)\cos\frac{\pi\xi}{2h}d\xi =$$
$$= \frac{2h}{\pi}\left[R_0 + h\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\right]; \qquad (10)$$
$$\int_0^h (R_0+\xi)^{-1}\cos\frac{\pi\xi}{2h}d\xi \approx$$
$$\approx \beta\left[\frac{R_0}{R} + \beta - 2\beta^2 + 3\left(\pi-2\right)\beta^3\right];$$
$$\beta = \frac{2h}{\pi R_0};$$

вираз (9) зводимо до квадратного рівняння відносно *c*, з якого отримуємо:

$$u(0) = R_0\frac{\sqrt{3\beta\rho g h}}{\sqrt{\pi\mu_*}} \times$$
$$\times\left\{1 + \frac{h}{R_0}\left(1-\frac{2}{\pi}\right) - \frac{R_0}{R} - \right.$$
$$-\beta\left[1-2\beta+3\left(\pi-2\right)\beta^2\right] -$$
$$\left. - \frac{\gamma h}{R_0}\left[2\left(1-\frac{2}{\pi}\right) + \frac{h}{R_0}\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (11)$$

Це максимальна швидкість потоку суміші.

Зазначимо, що останній інтеграл в (10) обчислювали наближено в припущенні, що $h \ll R$. Записана нерівність зазвичай виконується в практиці решітного віброcепарування. Якщо проводити точні обчислення, то інтеграл виражається через інтегральні косинус і синус, які затабульовані у виданнях зі спеціальних функцій [15, 16]. Тоді значення інтеграла можна знаходити методом інтерполяції, користуючись таблицями, але це не дає переваг у точності над записаним асимптотичним наближенням, коли $h \ll R$.

Знаючи $u(0)$, легко знайти середню швидкість потоку та об'ємну продуктивність решета, бо:

$$u_{cp} = \frac{1}{h}u(0)\int_0^h \cos\frac{\pi\xi}{2h}d\xi = \frac{2}{\pi}u(0);$$
$$Q \approx 4\left(R - \frac{h}{2}\right)hu(0).$$

Якщо обидва наближені розв'язки дали б однакові значення $u(0)$, то для другого розв'язку інтегральні характеристики u_{cp} і Q були б меншими ніж для першого, тобто неможливе повне співпадання усіх характеристик потоку в обох розв'язках.

Результати розрахунків.

Щоб з'ясувати розбіжності результатів, до яких призводять одержані наближені розв'язки, було проведено обчислення $u(0)$ при $R = 0{,}3075$ м; $\mu_* = 0{,}04$ Па×с^2; $h = 0{,}016$ м; $h = 0{,}02$ м та різних γ. Одержані значення максимальної швидкості потоку записано в табл. 1 і табл. 2. В останній колонці вказано значення $u(0)$, які дає числове розв'язання крайової задачі на комп'ютері. Їх умовно можна вважати точними. Порівняння результатів показує, що другий наближений розв'язок задачі дає більш точні результати, ніж перший. Перший розв'язок призводить до завищених значень швидкості, які можна приймати у якості верхніх оцінок. Отже розподіл швидкості по товщині рухомого шару краще апроксимується другою косинусоїди, ніж дугою параболи. Похибки наближених розв'язків зростають зі збільшенням значень параметрів h і γ.

Таблиця 1. Значення $u(0)$ при $h = 0{,}016$ м

γ	Вираз (7)	Вираз (11)	Числов. метод
	10 $u(0)$, м/с		
0,2	5,258	5,106	5,113
0,4	4,526	4,395	4,398
0,6	3,649	3,544	3,540
0,8	2,480	2,410	2,391

Таблиця 2. Значення $u(0)$ при $h = 0{,}02$ м

γ	Вираз (7)	Вираз (11)	Числов. метод
	10 $u(0)$, м/с		
0,2	7,328	7,115	7,124
0,4	6,297	6,114	6,115
0,6	5,059	4,913	4,902
0,8	3,398	3,302	3,265

Висновки. Результати обчислень за наближеними формулами несуттєво відрізняються від точних. Краще наближення до точних результатів дає другий варіант розв'язку, де розподіл швидкості по радіальній координаті апроксимується дугою косинусоїди. Формули, одержані в першому варіанті розвязку, більш доцільно використовувати для обчислень верхніх оцінок параметрів потоку в усталеному режимі руху.

Література

1. Тищенко Л.Н. Интенсификация сеперирования зерна / Л.Н. Тищенко – Харьков: Основа, 2004. – 224 с.

2. Тищенко Л.Н. Моделирование процессов зерновых сепараторов / Л.Н. Тищенко, Д.И. Мазоренко, М.В. Пивень и др. – Харьков: Міськдрук, 2010. – 360 с.

3. Тищенко Л.Н. Виброрешетная сепарация зерновых смесей / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міськдрук, 2011. – 280 с.

4. Тищенко Л.Н. Колебания зерновых потоков на виброрешетах / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міськдрук, 2012. – 267 с.

5. Тищенко Л.Н. Динамика виброцентробежной зерноочистки / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский и др. – Харьков: Міськдрук, 2013. – 440 с.

6. Долгунин В.Н. Быстрые гравитационные течения зернистых материалов: техника измерения, закономерности, технологическое применение / В.Н. Долгунин, В.Я. Борщев. – М.: Машиностроение, 2005. – 73 с.

7. Шваб А.В. Модель движения высококонцентрированной гранулированной среды. / А.В. Шваб, М.С. Марценко // Вестник Томского государственного университета, 2011. – №3(15). – С. 110 - 116.

8. Тищенко Л.Н. Способ повышения эффективности пневмосепарирования зерновых смесей в пневмосепарирующих устройствах. / Л.Н. Тищенко, С.А Харченко, Ю.П. Борщ и др. // Вісник ХНТУСГ: Механізація сільськогосподарського виробництва, 2014. – Вип. 148. – С. 150 - 158.

9. Bagnold R.A. Experiments on a gravity free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear / Proc. Roy. Soc. London, 1954. – Vol. 225. – P. 49 - 63.

10. Savage S.B. The stress tensor in a granular flow at high shear rates / S.B. Savage, D.J. Jeffrey // J. Fluid Mech., 1981. – Vol. 110. – P. 255 - 272.

11. Savage S.B. Granular flows down rough inclines: Review and extension / S.B. Savage // Mech. of granular materials, Elsevier Scince publishers, Amsterdam, 1983. – P. 261 - 282.

12. Сэвидж С. Гравитационное течение несвязанных гранулированных материалов. В кн. Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений / С. Сэвидж. – М.: Мир, 1985. – С. 86 -146.

13. Ishida M. Velocity destributions in the flow of particles in a inclined open channel / M. Ishida, T. Shirai // J. Chem. End. Jpn. 1979. – Vol. 12. – P. 45 - 50.

14. Кучеренко С.И. К расчету характеристик движения зерновой смеси на виброрешете конечной ширины / С.И. Кучеренко, В.В. Бурлака, В.П. Ольшанский и др. // Вісник ХНТУСГ: Механізація сільськогосподарського виробництва, 2010. – Вип. 93. Т.1. – С. 19 - 24.

15. Абромовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами)/ А. Абромовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

16. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

Аннотация

О расчете потока зерносмеси в цилиндрическом виброрешете методом Бубнова-Галеркина

В.П. Ольшанський, В.В. Бурлака, М.В. Слипченко, О.Н. Малец

Названным методом построено приближенные решения нелинейного дифференциального уравнения установившегося осесимметричного движения слоя виброожиженной зерновой смеси по цилиндрическому решету вертикальной виброцентрифуги. При выводе дифференциального уравнения движения было использовано нелинейную реалогическую зависимость типа Сэвиджа, между касательным напряжением и скоростью деформаций сдвига. Предложено два варианта расчетных формул для вычисления скорости потока и объемной производительности решета, которые основаны на различных аппроксимациях распределения скорости по толщине движущегося слоя смеси. В ходе сравнения максимальных значений скорости установлено удовлетворительное согласование результатов, к которым приводят предложенные приближенные решения и численное решение краевой задачи на компьютере.

Ключевые слова: *скорость движения, поток смеси, цилиндрическое виброрешето, реалогическая зависимость Сэвиджа, метод Бубнова-Галеркина.*

Abstract

About calculation of grain mixture flow on a cylindrical vibration sieve by Bubnov-Galerkin's method

O.P. Olshansky, V.V. Burlaka, M.V. Slipchenko, O.H. Malec

An approximate solution of the nonlinear differential equations describing the axisymmetric motion of layer of vibroliquefied grain mixture on vertical cylindrical sieve of vibrating centrifuge constructed by called method. In the derivation of the differential equations of motion it was used a non-linear realogic dependence of the Savage's type, between shear stress and shear strain rate. Two variants of calculation formulas are proposed to calculate the flow velocity and the volume efficiency of the sieve, which are based on different approximations of the velocity distribution across the thickness of the moving layer the mixture. In the comparison of the maximum values speed set satisfactory agreement of results that result from the proposed approximate solutions and numerical solution of the boundary problem on a computer.

Keywords: *speed of moution, flow of mixture, cylindrical vibrosieve, Savage's realogic dependence, Bubnov-Galerkin's method*.

Представлено від редакції: Л.М. Тіщенко / Presented on editorial: L.M. Tishhenko
Рецензент: С.О. Харченко / Reviewer: S.O. Harchenko
Подано до редакції / Received: 27.10.2015