

УДК 629.1.01

## Вплив обертання елементів трансмісії як пружної системи на власні коливання

Є.І. Калінін

*Харківський національний технічний університет сільського господарства  
імені Петра Василенка (Харків, Україна)*

На даному етапі розвитку тракторобудування підвищення потужності енергетичного засобу сприяє значному збільшенню коливань моменту двигуна внутрішнього згоряння. Останні передаються в трансмісію в якості пружних крутильних коливань валів усіх агрегатів трансмісії. Таким чином, для забезпечення належного рівня динамічних напружень необхідно при проектуванні машини розв'язувати задачу коливань моторно-трансмісійної системи. Окрім того, не дивлячись на сучасний стан проектування та складання енергетичних засобів, в умовах функціонування спостерігається обертання валів, з розташованими на них масами, навколо осей, що не співпадають з центральними осями інерції системи.

Таке обертання можливе як при недотриманні технологічного процесу виготовлення, так і при значних зношеннях опор даних валів. Окремо дане питання розглядається з точки зору формування віброприскорень, що впливають на власні частоти та форми коливань валів, їх критичну частоту обертання та резонансні характеристики.

Тому, в роботі розглянуто питання зміни власних коливань трансмісійної установки як пружної системи, яка обертається навколо вісі, що проходить близько до головної вісі інерції системи. Для аналізу роботи пружного валу в умовах відсутності співвісності центральної вісі та вісі обертання системи, розроблено дискретну модель системи матеріальних точок, з'єднаних між собою пружними безінерційними в'язями. Розглянуто випадок, коли незакріплена система в своєму вільному русі має п'ять ступенів вільності. При цьому, для вивчення найбільший інтерес представляють тільки дві форми власних крутильних коливань: симетрична та антисиметрична в повздовжній площині системи.

В ході теоретичного моделювання визначено, що збільшення частоти обертання системи навколо вісі, яка не проходить через центральну вісь інерції системи, сприяє збільшенню власних частот коливань на першому та другому тоні. Окрім того, формування крутильних коливань в податливій пружній конструкції також сприяє збільшенню частот системи як для першого, так і для другого тонів.

**Ключові слова:** *власна частота, центральна вісь інерції, механічна система, пружні коливання, віброприскорення, елементи трансмісії.*

**Вступ.** В якості енергетичної установки сучасні колісні та гусеничні машини використовують поршневий двигун внутрішнього згоряння. Будучи машиною періодичної дії, ДВЗ є джерелом коливань, які розповсюджуються як в трансмісії, так і по всій машині в загалом. Вібрації трансмісійної системи проявляються як вимушені переважно крутильні коливання її ділянок, починаючи з колінчастого валу самого двигуна. Іншою причиною виникнення крутильних коливань трансмісії є змінний опір руху машини [1].

**Аналіз останніх досягнень та публікацій.** В нормальних умовах експлуатації правильно спроектованої машини спостерігаються нерезонансні вимушені коливання, які можуть викликати втомні пошкодження деталей. В умовах виникнення резонансу їх амплітуди різко підвищуються, що може призвести до руйнування впродовж малого проміжку часу.

В обох випадках для забезпечення належного рівня динамічних напружень необхідно при

проектуванні машини розв'язувати задачу коливань моторно-трансмісійної системи. Розв'язок такої задачі починається з визначення власних частот та форм коливань, які визначають резонансні режими. Останні повинні бути виведені за межі робочого діапазону швидкостей, що досягається відповідним вибором масових характеристик системи та її жорсткості.

Роботи [2 - 6], які спрямовані на вирішення поставлених задач, розглядаються власні частоти та форми коливань системи в загальному випадку та при обертанні останньої відносно однієї з головних осей інерції.

Однак, не дивлячись на сучасний стан проектування, виготовлення та складання, доволі часто спостерігається обертання валів, з розташованими на них масами (наприклад, валів коробки змінних передач з шестернями на них), відносно осей, які не співпадають з віссю інерції.

Відмітимо, що такий поворот вектору кутової швидкості може спостерігатися і при зношуванні

в процесі експлуатації опор валу. Окрім того, найбільш цікавою є динамічна характеристика системи з пружними в'язями, що дозволить врахувати передачу крутильних коливань.

**Мета та постановка задачі.** Метою роботи є визначення впливу зміщення осі обертання відносно головної вісі інерції на власні частоти та форми коливань системи. Для досягнення мети необхідно скласти дискретну модель системи матеріальних точок, з'єднаних між собою пружними безінерційними в'язями.

**Вирішення задачі.** Розглянемо випадок обертання системи навколо вісі, яка розташована достатньо близько до вісі інерції даної системи. Окрім того, представимо систему у вигляді дискретної моделі, яка складається з матеріальних точок, з'єднаних між собою пружними безінерційними в'язями.

Тоді в дискретній розрахунковій схемі такого типу радіус-вектор  $\vec{r}_i^0$  і-ї матеріальної точки в нерухомій системі координат можна представити у вигляді:

$$\vec{r}_i^0 = \vec{r}_c^0 + \vec{r}_i + \vec{u}_i. \quad (1)$$

Переміщення  $\vec{u}_i$ , яке викликане пружними деформаціями, можна виразити через узагальнені координати  $q_\lambda(t)$  та одиничні пружні переміщення  $\vec{k}_{i\lambda}$ :

$$\vec{u}_i = \sum_{\lambda=1}^n q_\lambda(t) \vec{k}_{i\lambda}, \quad (2)$$

де  $n$  – число ступенів вільності в пружному русі.

Положення рухомої системи координат  $xuz$ , вісі якої є головними центральними осями системи, відносно нерухомої задається шляхом послідовних поворотів на кути  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\gamma$  навколо відповідних осей (рис. 1, а).

Кути  $\beta$  та  $\gamma$  в розрахунках приймаються достатньо малими, а кут  $\alpha$  таким, що має значну величину.

Приймемо, що вектор кутової швидкості обертання системи  $\vec{\omega}$  спрямований вздовж вісі  $ox_1$ . Тоді проекції вектору  $\vec{\omega}$  на вісі  $xuz$  матимуть наступні значення:

$$\omega_x = \dot{\alpha}, \quad \omega_y = \dot{\beta} - \dot{\alpha}\gamma, \quad \omega_z = \dot{\gamma} + \dot{\alpha}\beta. \quad (3)$$

Система рівнянь, що описує власні коливання дискретної моделі, яка обертається, може бути представлена у вигляді:

$$M\ddot{q}_\lambda + 2\omega \sum_{v=1}^n \dot{q}_v l_{\lambda v} + \sum_{v=1}^n c_{\lambda v} q_v - \omega^2 \sum_{v=1}^n q_v s_{\lambda v} + 2\omega\dot{\beta}b_{\lambda xy} + 2\omega\dot{\gamma}b_{\lambda xz} - 2\omega^2\gamma b_{\lambda xy} +$$

$$+ 2\omega^2\beta b_{\lambda xz} = \omega^2(b_{\lambda yy} + b_{\lambda zz}), \quad \lambda = 1, 2, 3, \dots, n;$$

$$\ddot{\beta}J_y + \omega(I_x - I_y - I_z)\dot{\gamma} + \omega^2(I_x - I_z)\beta + \quad (4)$$

$$+ 2\omega^2 \sum_{v=1}^n q_v b_{vxz} - 2\omega \sum_{v=1}^n \dot{q}_v b_{vxy} = 0$$

$$\ddot{\gamma}J_z - \omega(I_x - I_y - I_z)\dot{\beta} + \omega^2(I_x - I_y)\gamma +$$

$$+ 2\omega^2 \sum_{v=1}^n q_v b_{vxy} - 2\omega \sum_{v=1}^n \dot{q}_v b_{vxz} = 0$$

При цьому коефіцієнти  $b_{\lambda xy}$ ,  $b_{\lambda xz}$ ,  $b_{\lambda yy}$ ,  $b_{\lambda zz}$ ,  $l_{\lambda v}$  та  $s_{\lambda v}$  є функціоналами маси  $m_i$  матеріальної точки системи, її радіус-вектору  $\vec{r}_i$  та одиничного пружного переміщення  $\vec{k}_{i\lambda}$ .

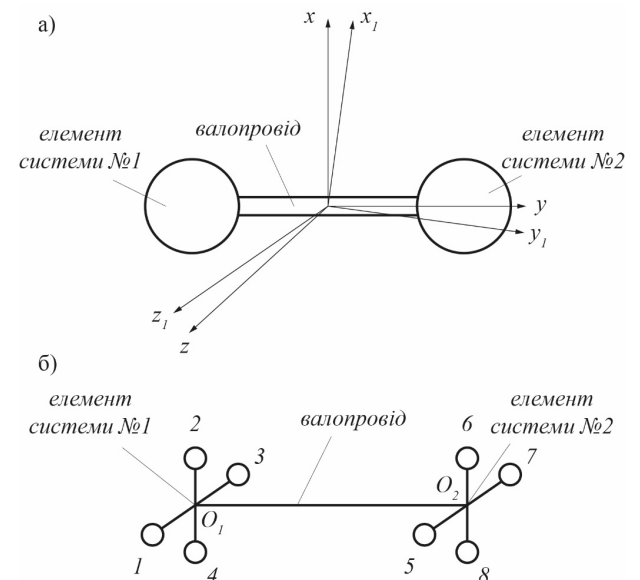


Рис. 1. Динамічна (а) та дискретна (б) моделі валопроводу трансмісійної установки транспортно-енергетичного засобу

Динамічна модель, яка досліджується, являє собою два жорстких тіла, з'єднаних пружним елементом.

Дискретна розрахункова схема в цьому випадку складається з восьми матеріальних точок, які попарно розташовані в ортогональних площинах (рис. 1, б).

Усі в'язі, окрім  $O_1 - O_2$ , приймаємо абсолютно жорсткими. Окрім того, в'язь  $O_1 - O_2$  будемо вважати жорсткою на деформацію розтягання-стиск.

Незакріплена система для випадка  $\omega = 0$  в своєму вільному русі має п'ять ступенів вільності. Для вивчення найбільший інтерес

представляють тільки дві форми власних крутильних коливань: симетрична та антисиметрична в площині  $xoz$ .

Для розрахунку моделі використовуємо спосіб складання рівнянь руху дискретних моделей, представлений в роботі [7]. Тоді система рівнянь, яка описує власні коливання дискретної моделі, яка обертається навколо вісі, що близька до вісі  $Ox$  з кутовою швидкістю  $\omega$ , матиме вигляд:

$$\begin{cases} M\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 - s_{11}\omega^2q_1 + 2\omega l_{13}\dot{q}_3 = 0; \\ M\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 - s_{22}\omega^2q_2 + 2\omega\dot{\gamma}b_{2xz} + \\ \quad 2\omega^2\beta b_{2xz} = 0; \\ M\ddot{q}_3 + c_{33}q_3 - s_{33}\omega^2q_3 + 2\omega l_{31}\dot{q}_1 = 0; \\ M\ddot{q}_4 + c_{44}q_4 - s_{44}\omega^2q_4 = 0; \\ M\ddot{q}_5 + c_{55}q_5 - s_{55}\omega^2q_5 = 0; \\ \ddot{\beta}J_y + \omega(I_x - I_y - I_z)\dot{\gamma} + \\ \quad + \omega^2(I_x - I_z)\beta + 2\omega^2b_{2xz}q_2 = 0; \\ \ddot{\gamma}J_z - \omega(I_x - I_y - I_z)\dot{\beta} + \\ \quad + \omega^2(I_x - I_y)\gamma - 2\omega b_{2xz}\dot{q}_2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Перше та третє рівняння системи (5) розв'язуються спільно та показують вплив додаткових відцентрових сил інерції та сил Коріоліса на перший і третій тони коливань.

Четверте та п'яте рівняння системи (5) визначає вплив обертання на четвертий та п'ятий тон. Тільки пружні коливання по другому (несиметричному) тону пов'язані з коливаннями головних осей інерції ( $b_{2xz} \neq 0$ ).

Таким чином, головна система рівнянь має наступний вигляд:

$$\begin{cases} M\ddot{q}_2 + c_{22}q_2 - s_{22}\omega^2q_2 + \\ \quad + 2\omega\dot{\gamma}b_{2xz} + 2\omega^2\beta b_{2xz} = 0; \\ \ddot{\beta}J_y + \omega(I_x - I_y - I_z)\dot{\gamma} + \\ \quad + \omega^2(I_x - I_z)\beta + 2\omega^2b_{2xz}q_2 = 0; \\ \ddot{\gamma}J_z - \omega(I_x - I_y - I_z)\dot{\beta} + \\ \quad + \omega^2(I_x - I_y)\gamma - 2\omega b_{2xz}\dot{q}_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді  $q_2 = a \sin pt$ ,  $\beta = b \sin pt$  та  $\gamma = c \cos pt$ .

Рух системи по власним формам коливань включає періодичну зміну узагальненої координати  $q_2$ , яка відповідає несиметричній формі, а також періодичні зміни малих кутів  $\beta$  та  $\gamma$  (рух головних осей інерції відносно інерційних).

Рух системи по власній формі, яка відповідає частоті  $p_1$ , обумовлений в основному силами інерції обертання.

Якщо дану модель розглядати як абсолютно жорстку, то отримаємо:

$$p_{1a} = \omega \sqrt{\frac{(I_x - I_y)(I_x - I_z)}{I_y I_z}}. \quad (7)$$

Частота  $p_{1a}$  являє собою частоту періодичної зміни кутів  $\beta$  та  $\gamma$  (або  $\omega_y$  і  $\omega_z$ ) при малих коливаннях осей  $xuz$ .

З розглянутої дискретної моделі можна отримати залежність (рис. 2) зміни частот  $p_1$  та  $p_{1a}$  від величини кутової швидкості обертання системи.

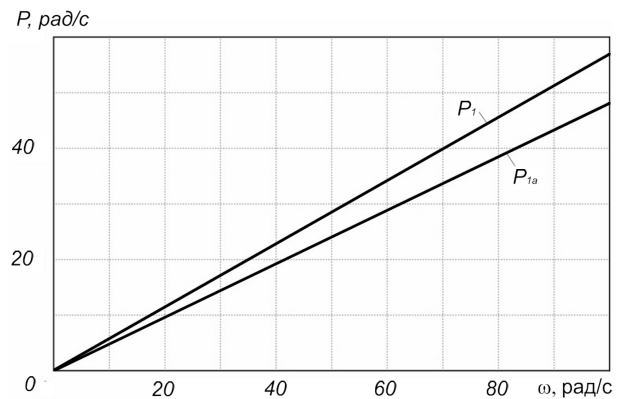


Рис. 2. Залежність власних частот коливань від кутової швидкості обертання системи

**Висновки.** З отриманої залежності можна зробити висновок, що збільшення частоти обертання системи відносно вісі, яка близька до головної вісі інерції, призводить до підвищення власної частоти коливань. Окрім того, внаслідок впливу пружності конструкції, спостерігається, що  $p_1 > p_{1a}$ . Також, власна частота  $p_2$  – це частота другого тону коливань  $p_{20}$ , яка змінена в результаті впливу обертання. Слід зазначити, що власне число  $p_3 = \omega$ , відповідає тривіальному розв'язанню системи.

## Література

1. Калінін Є.І. Частотно-динамічна марематична модель тракторного агрегату з передачею крутного моменту до рушіїв сільськогосподарської машини / Є.І. Калінін // Вісник ХНТУСГ ім. Петра Василенка. Х.: ХНТУСГ, 2015. – Вип. 156. – С. 327 - 334.

2. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов: справ. пособие / Г.С. Маслов. – М.: Машиностроение, 1982. – 272 с.

3. Терских В.П. Крутильные колебания валопровода силовых установок. Исследования и методы расчета: в 4-х т. / В.П. Терских. Т.1: Элементы системы и возмущающие моменты. – Л.: Судостроение, 1969. – 206 с.

4. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов с двигателями внутреннего сгорания: научное издание / В.Л. Вейц, А.Е. Кочура. – Л.: Машиностроение, 1976. – 383 с.

5. Фаворин М.В. Моменты инерции тел / М.В. Фаворин. – М.: Машиностроение, 1970. – 312 с.

6. Алексеева С.В. Силовые передачи транспортных машин. Динамика и расчет / С.В. Алексеева, В.Л. Вейц, Ф.Р. Геккер, А.Е. Кочура. – Л.: Машиностроение, 1982. – 256 с.

7. Алексеев С.А. Динамика свободных систем материальных точек с упругими связями / С.А. Алексеев // Прикладная математика и механика. – 1970. – Вып. 3. – С. 25 - 30.

## Аннотация

### Влияние вращения элементов трансмиссии как упругой системы на собственные колебания

Е.И. Калинин

На данном этапе развития тракторостроения повышения мощности энергетического средства способствует значительному увеличению колебаний момента двигателя внутреннего сгорания. Последние передаются в трансмиссию в качестве упругих крутильных колебаний валов всех агрегатов трансмиссии. Таким образом, для обеспечения надлежащего уровня динамических напряжений необходимо при проектировании машины решать задачу колебаний моторно-трансмиссионной системы. Кроме того, несмотря на современное состояние проектирования и составления энергетических средств, в условиях функционирования наблюдается вращение валов, с расположенными на них массами, вокруг осей, которые не совпадают с центральными осями инерции системы.

Такое вращение возникает как при несоблюдении технологического процесса изготовления, так и при значительных износах опор данных валов. Отдельно данный вопрос рассматривается с точки зрения формирования виброускорений, влияющих на собственные частоты и формы колебаний валов, их критическую частоту вращения и резонансные характеристики.

Поэтому, в работе рассмотрены вопросы изменения собственных колебаний трансмиссионной установки как упругой системы, которая вращается вокруг оси, проходящей близко к главной оси инерции системы. Для анализа работы упругого вала в условиях отсутствия соосности центральной оси инерции и оси вращения системы, разработана дискретная модель системы материальных точек, соединенных между собой упругими безынерционными связями. Рассмотрен случай, когда незакрепленная система в своем свободном движении имеет пять степеней свободы. При этом, для изучения наибольший интерес представляют только две формы собственных крутильных колебаний: симметричная и антисимметричная в продольной плоскости системы.

В ходе теоретического моделирования определено, что увеличение частоты вращения системы вокруг оси, которая не проходит через центральную ось инерции, способствует увеличению собственных частот колебаний на первом и втором тоне. Кроме того, формирование крутильных колебаний в податливой упругой конструкции также способствует увеличению частот системы как для первого, так и для второго тонов.

**Ключевые слова:** собственная частота, центральная ось инерции, механическая система, упругие колебания, элементы трансмиссии.

## Abstract

### Influence of rotation transmission elements as elastic system for own vibrations

Y.I. Kalinin

At this stage of development of tractor construction increase the power of energy tools contributes to a significant increasing of torque fluctuations of the internal combustion engine. These vibrations are transmitted to the transmission as the elastic torsional vibration shaft of the drive train. Thus, to ensure an adequate level of dynamic stresses is necessary when designing machines to solve the problem of vibrations of motor-

transmission system. In addition, despite the current state of design and drafting power tools, there is rotation of the shaft, located on them the masses around the axes, which do not coincide with the central axes of inertia of the system.

This rotation occurs as non-compliance with the technological process of manufacturing and in considerable wear supports these shafts. Separately, the issue is considered from the point of view of formation of vibration acceleration, impact on the natural frequencies and forms of oscillations of the shaft, their critical speed and resonance characteristics.

Therefore, the questions of changing the natural oscillations of transmission settings as the elastic system, which revolves around an axis close to the main axis of inertia of the system, are investigated in the article. For the analysis of work the elastic shaft in the absence of alignment of the central axis of inertia and the rotation axis of the system, developed by a discrete model of a system with interconnected inertia less elastic bonds. Consider the case where system is not fixed at its free movement has five degrees of freedom. At the same time, to explore the most interesting are the only two forms of its own torsional vibrations: symmetric and antisymmetric in the longitudinal plane of the system.

The theoretical modeling determined that the increase in speed of the system about an axis that passes through the central axis of inertia increases the natural vibration frequencies of the first and the second tone. Furthermore, the formation of torsional vibrations in pliable elastic structure also increases frequencies of the system for both the first and second tones.

**Keywords:** *natural frequency, the central axis of inertia, mechanical system, elastic vibrations, transmission elements.*

---

**Представлено від редакції: А.Т. Лебедєв / Presented on editorial: A.N. Lebediev**

**Представлено: М.П. Арт'юмов / Presented by: M.P. Art'omov**

**Рецензент: Сандомирский / Reviewer: Sandomirskiy**

*Подано до редакції / Received: 16.09.2015*